Analizinė geometrija

Paskaitų konspektas

Turinys

1. Vektoriai . . . 5
   - 1.1. Pagrindinės sąvokos . . . 5
   - 1.2. Baziniai vektoriai . . . 7
   - 1.3. Atkarpos dalijimas duotuoju santykiu . . . 12
   - 1.4. Skaliarinė vektorių sandauga . . . 13
   - 1.5. Vektorinė vektorių sandauga . . . 15
   - 1.6. Vektorių mišrioji sandauga . . . 17
2. Erdvės geometrija. Plokštumų ir tiesių lygtys . . . 18
   - 2.1. Erdvės taškų aibės ir jų lygtys . . . 18
   - 2.2. Parametrinės lygtys . . . 21
   - 2.3. Tiesių ir plokštumų lygtys . . . 24
   - 2.4. Įvairiai apibrėžtų tiesių ir plokštumų lygtys . . . 30
   - 2.5. Kampas tarp tiesės ir plokštumos . . . 32
   - 2.6. Taško atstumas iki plokštumos ir tiesės . . . 33

1 Elipsė, hiperbolė ir parabolė **37**

1. Elipsės ir hiperbolės apibrėžimas . . . 37
2. Kanoninė koordinačių sistema bei kanoninės elipsės ir hiperbolės lygtys . . . 38
3. Elipsės formos tyrimas . . . 41
4. Hiperbolės formos tyrimas; asimptotės . . . 42
5. Jungtinė hiperbolė . . . 43

6. Hiperbolės asimptotinė lygtis 44
7. Kreivės taško atstumai iki židinių 45
8. Elipsės ir hiperbolės direktrisės 45
9. Parabolės apibrėžimas bei kanoninė lygtis 47
10. Kreivės liestinė 50
11. Elipsės ir hiperbolės liestinės 50
12. Parabolės liestinės 52
13. Elipsės ir hiperbolės optinės savybės 53
14. Parabolės optinės savybės 55
15. Pratimai bei uždaviniai 55

2 Antros eilės kreivės **57**
1. Koordinačių sistemos transformacija 57
1.1. Bendrosios koordinačių transformacijos formulės 59
1.2. Koordinačių sistemos posūkis 60
1.3. Koordinačių sistemos lygiagretus postūmis 60
1.4. Matricinė koordinačių transformacijos formulių išraiška 61
2. Bendroji antros eilės kreivės lygtis 62
2.1. Ryšys tarp kreivės lygčių atžvilgiu skirtingų koordinačių sistemų 63
3. Antros eilės kreivės lygties invariantai 63
4. Charakteringoji lygtis 64
5. Antros eilės kreivės centras 65
6. Kvadratinės lygties dalies prastinimas 66
7. Centrinių kreivių kanoninės lygtys 68
7.1. Bendroji dalis 68
7.2. Įvairūs atvejai 69
7.3. Elipsės ir hiperbolės kanoninės koordinačių sistemos radimas 71
8. Necentrinių kreivių kanoninės lygtys 71
8.1. Bendroji dalis 71
8.2. Įvairūs atvejai 72

8.3. Necentrinės kreivės tipo nustatymas 74
9. Vienas pavyzdys 74
10. Antros eilės kreivės ir tiesės sankirta 76
10.1. Asimptotinės kryptys 77
11. Antros eilės kreivių liestinės 80
11.1. Medžiaga pamąstymui 82
11.2. Uždavinio sprendimo pavyzdys 82
12. Antros eilės kreivės skersmenys 83
13. Antros eilės kreivės simetrijos ašys 84
13.1. Parabolės kanoninės koordinačių sistemos radimas 86
14. Pratimai bei uždaviniai 87

3 Antros eilės paviršiai **89**
1. Bendroji antros eilės paviršiaus lygtis 89
2. Kanoninės antros eilės paviršių lygtys 90
3. Antros eilės paviršių formos tyrimas 98
3.1. Cilindrai 101
3.2. Kūgis 102
3.3. Elipsoidas 104
3.4. Vienašakis hiperboloidas 104
3.5. Dvišakis hiperboloidas 106
3.6. Elipsinis paraboloidas 108
3.7. Hiperbolinis paraboloidas 110
4. Antros eilės paviršių tiesinės sudaromosios 111
5. Sukimosi paviršiai 114
5.1. Sukimosi elipsoidas 115
5.2. Vienašakis sukimosi hiperboloidas 116
5.3. Dvišakis sukimosi hiperboloidas 117
5.4. Elipsinis sukimosi paraboloidas 117
5.5. Elipsinis sukimosi cilindras 117

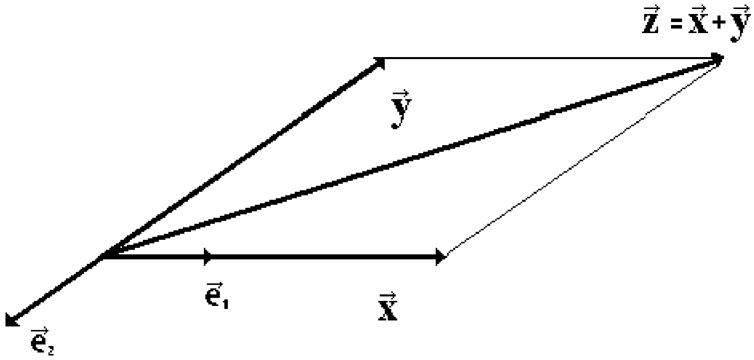
6. Plokštumos ir antros eilės paviršiaus sankirta . . . 118
7. Antros eilės paviršiaus ir tiesės sankirta . . . 119
8. Antros eilės paviršiaus liečiamoji plokštuma . . . 120
9. Paviršiaus ir liečiamosios plokštumos sankirta . . . 121
10. Charakteringų uždavinių sprendimas . . . 122
11. Cilindro lygties radimas . . . 122
11.1. Kūgio lygties radimas . . . 123
11.2. Tiesinių sudaromųjų radimas . . . 123
12. Pratimai bei uždaviniai . . . 124
Literatūra . . . 126

1. Vektoriai

1.1. Pagrindinės sąvokos

Vektoriaus sąvoka skirtinguose matematikos skyriuose apibrėžiama skirtingai. *Vektoriumi* vadinkime matematinį dydį, apibūdinamą skaitine reikšme ir kryptimi erdvėje. Grafiškai vektoriai vaizduojami tiesių atkarpomis su rodyklėmis. Dydį, kuriam apibūdinti pakanka skaitinės reikšmės, vadinkime *skaliaru*. Šiuo atveju mūsų skaliarais bus realūs skaičiai. Vektorius žymėsime mažosiomis raidėmis su strėle virš jų, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, arba dviem didžiosiomis raidėms, kurių pirmoji reiškia vektoriaus pradžios tašką, antroji - pabaigos: $\vec{AB}$. Vektoriaus ilgiu vadinsime jį vaizduojančios kryptinės atkarpos ilgį, žymėsime modulio ženklu: $|\vec{a}|$.

Apibrėšime vektorių sudėties ir daugybos iš skaliaro operacijas. Dviejų vektorių suma vadinsime vektorių, gaunamą pagal pirmame pavyzdyje iliustruojamą lygiagretainio taisyklę.



1 pav. Vektorių suma

Du vektorius vadinsime *lygiagrečiais (kolineariais)*, jie juos vaizduojančios tiesių atkarpos lygiagrečios. Du vektorius vadinsime *lygiais*, jei jie lygiagretūs, tos pačios krypties ir vienodų ilgių. *Vektoriaus $\vec{a}$ ir skaliaro λ sandauga* yra lygiagretus vektorius $\lambda\vec{a}$, kurio ilgis $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$, o kryptis sutampa su vektoriaus $\vec{a}$ kryptimi kai $\lambda > 0$ ir yra priešinga kai $\lambda < 0$. Nesunku suprasti, kad geometrinė $|\lambda|$ prasmė - vektoriaus ilgis. *nuliniu vektoriumi* vadinsime vektorių, kurio ilgis lygus nuliui, t.y. - tašką. Nulinį vektorių žymime $\vec{0}$.

Vektorių veiksmų savybės:

1. Vektorių sudėtis yra komutatyvi:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a};$$

2. Vektorių sudėtis yra asociatyvi:

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{b} + (\vec{a} + \vec{c})\,;$$

3. Skaičių daugyba ir vektoriaus daugyba iš skaičiaus yra asociatyvi:

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}), \forall \alpha, \beta, \vec{a};$$

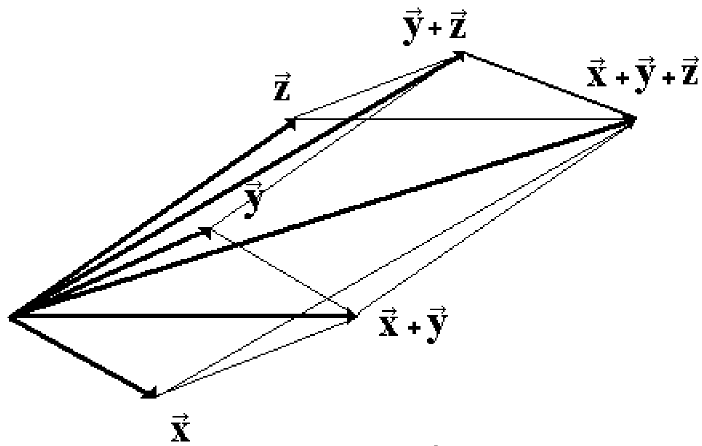
4. Skaičių sudėtis ir vektoriaus daugyba iš skaičiaus yra distributyvi:

$$(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}, \forall \alpha, \beta, \vec{a};$$

5. Daugybos iš skaičiaus ir vektorių sudėtis yra distributyvi:

$$\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b},\forall\alpha,\vec{a},\vec{b}.$$

Vektorių sudėties asociatyvumas akivaizdus iš 1.pav., asociatyvumas demonstruojamas antrajame paveikslėl



2 pav. Vektorių sumos asociatyvumas

1.2. Baziniai vektoriai

Trečioji ir ketvirtoji savybės akivaizdžios. Penktoji geometriškai reiškia lygiagretainių, gautų sudedant vektorius, panašumą. Vektorių $\lambda_1\vec{e_1}+\lambda_2\vec{e_2}+\cdots+\lambda_n\vec{e_n}$ vadiname vektorių $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots,\vec{e}_n$ *tiesiniu dariniu*, $\lambda_1,\lambda_2\ \cdots,\lambda_n$ čia - skaliarai.

Baze plokštumoje vadiname dviejų nelygiagrečių vektorių rinkinį $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, pačius vektorius vadiname baziniais.

Baze erdvėje vadinami bet kurie trys vektorių $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, nelygiagrečių tai pačiai plokštumai, rinkinys. Patys tokie vektoriai vadinami *nekomplanariais vektoriais*, *erdvės baziniais vektoriais*.

Teorema. Bet kuris vektorius gali būti išreikštas bazinių vektorių tiesiniu dariniu erdvėje

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3},$$

arba plokštumoje

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2},$$

to tiesinio darinio koeficientų rinkinys - (a_1, a_2, a_3) erdvėje ir (a_1, a_2) plokštumoje - vadinamas vektoriaus $\vec{a}$ koordinatėmis.

$\Diamond$ Pademonstruokime šios išraiškos galimybę plokštumoje. Kadangi baze plokštumoje gali būti bet kurie du nelygiagretūs vektoriai, o vektoriai $\vec{x}$ ir $\vec{y}$, kaip pavaizduota 1 pav., yra tokie, tegul baziniai vektoriai $\vec{e_1},\ \vec{e_2}$ yra lygiagretūs jiems. Tuomet, akivaizdu, bet kokį vektorių $\vec{z}$ galime išreikšti kaip bazinių vektorių tiesinį darinį: $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y} = z_1\vec{e_1} + z_2\vec{e_2}$. $\blacklozenge$

Baze tiesėje galime vadinti bet kurį nenulinį šios tiesės vektorių.

Kitoje bazėje vektoriaus koordinatės kitokios. Toje pačioje bazėje koordinatės nustatomos vienareikšmiškai.

Lygūs vektoriai turi vienodas koordinates.

Dauginant vektorių iš skaičiaus, visos jo koordinatės dauginamos iš to skaičiaus:

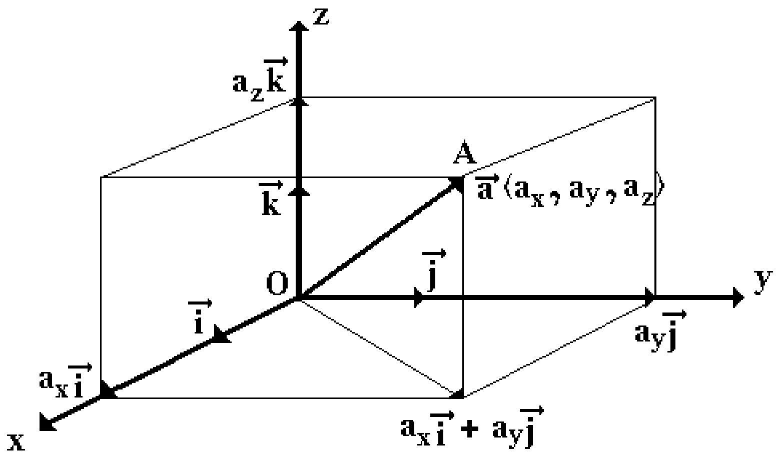
$$\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = (\alpha \cdot a_1)\vec{e}_1 + (\alpha \cdot a_2)\vec{e}_2 + (\alpha \cdot a_3)\vec{e}_3.$$

Sudedamų vektorių koordinatės irgi sudedamos:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) + (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) =$$
$$(a_1 + b_1)\vec{e_1} + (a_2 + b_2)\vec{e_2} + (a_3 + b_3)\vec{e_3}.$$

Dekarto koordinatėmis erdvėje vadinama stačiakampė koordinačių ssitema su vienodais koordinačių ašių masteliais. Koordinačių ašys vadinamos *abscisių* ašimi, *ordinačių* ašis ir trečioji – aplikačių ašimi *koordinačių pradžia*. Žymimos atitinkamai Ox, Oy ir Oz atitinkamai, raide O čia žymimas *koordinačių pradžios taškas*. Koordinačių ašyse talpinami vienetinio ilgio vektoriai $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, kurie puikiai atlieka bazinių vektorių, kuriuos iki šiol žymėjome $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$,$\vec{e}_3$, vaidmenį.

Dėka to, kad šie baziniai vektoriai tarpusavyje statmeni ir visi yra vienetinio ilgio, jų rinkinį $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vadiname *ortonormuotąja baze*.

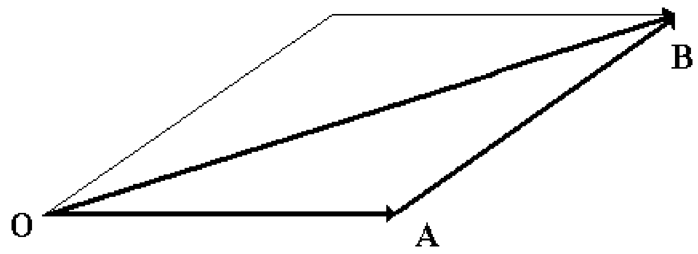


3 pav. Dekarto koordinačių sistema

Vektoriaus $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ koordinatės Dekarto koordinačių sistemoje reiškia ir to vektoriaus galinio taško koordinates (a_x, a_y, a_z) ir yra vadinami to taško taško A koordinatėmis (abscise, ordinate ir aplikate atitinkamai), žr. 3 pav. Matome, kad $\vec{a} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j}) + a_z\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$.

Raskime vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ koordinates, žr. 4 pav.:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}=\\ = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 - a_1\vec{e}_1 - a_2\vec{e}_2 - a_3\vec{e}_3 =\\ (b_1 - a_1)\vec{e}_1 + (b_2 - a_2)\vec{e}_2 + (b_3 - a_3)\vec{e}_3\end{aligned}$$



4 pav. Vektorius $\overrightarrow{AB}$

Vadinasi, vektoriaus koordinatės lygios jo galo taško ir pradžios taško koordinačių skirtumui.

Vektoriai $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\cdots$, $\vec{a}_n$ yra vadinami *tiesiškai priklausomais*, kai egzistuoja tokie koeficientai λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_n, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_n^2 \neq 0$ (t.y., ne visi lygūs nuliui), kad

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Vadinasi, tokiu atveju vieną iš vektorių galime išreikšti likusių $n-1$ vektorių tiesiniu dariniu, ir atvirkščiai. Suformuluokime teiginį teoremos pavidalu.

Teorema. Vektorių sistema $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\cdots$, $\vec{a}_n$ yra tiesiškai priklausoma tada ir tik tada, kai $\exists\vec{a}_i$:

$$\vec{a}_i = c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \cdots + c_{i-1}\vec{a}_{i-1} + c_{i+1}\vec{a}_{i+1} + \cdots + c_n\vec{a}_n.$$

$\Diamond$ Tarkime, kad vektoriai x_1, ..., x_n yra tiesiškai priklausomi. Tada $\exists\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Kadangi ne visi $\lambda_j = 0$, pasirinkime $\lambda_i \neq 0$. Taigi

$$\vec{a}_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i}\vec{a}_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i}\vec{a}_n.$$

Todėl turime $c_j = -\frac{\lambda_j}{\lambda_i}$, kai $j \neq i$ ir $c_i = 1$.
Tarkime, kad $\exists \vec{a}_i$: $\vec{a_i} = c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_n\vec{a}_n$. Tada imkime $\lambda_j = c_j$, kai $j \neq i$ ir $c_i = -1$, ir gausime, kad vektoriai yra tiesiškai priklausomi. ⧫

Teorema. Vektoriai tiesiškai priklausomi tada ir tik tada, kai iš jų koordinačių sudarytos matricos rangas mažesnis už vektorių skaičių.
◊ Nustatykime, ar vektoriai

$$\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_m.\ \text{kur}\ \vec{a_i} = \{(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})i = 1, 2, \ldots, m\}$$

yra tiesiškai priklausomi.

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_m \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Iš čia gauname tiesinių homogeninių lygčių sistemą:

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1m}\alpha_m = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2m}\alpha_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{nm}\alpha_m = 0. \end{aligned}$$

Vektoriai $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ yra tiesiškai priklausomi tada ir tik tada, kai ši homogeninė sistema turi nenulinį sprendinį. Pasinaudokime iš tiesinės algebros kurso žinoma Kronekerio-Kapelio teorema. Ji teigia, kad, kai $m = \text{rang } A$, sistema turi vienintelį nulinį sprendinį, todėl vektoriai yra tiesiškai nepriklausomi.
Pastebėkime, jog tokios matricos rangas negali būti didesnis už abu skaičius m ir n. Vadinasi, daugiau kaip n n-mačių vektorių visada yra tiesiškai priklausomi. ⧫

Išvada. Vadinasi, bet kurie 3 vektoriai plokštumoje arba 4 vektoriai erdvėje visada yra tieiškai priklausomi. Tai kaip tik svarbu geometrijoje.

Tai darsyk patvirtina, kad plokštumoje rasime daugiausiai du tiesiškai nepriklausomus vektorius, o erdvėje - tris.

1.3. Atkarpos dalijimas duotuoju santykiu

Tarkime, kad turime du taškus $A(a_x, a_y, a_z)$ ir$B(b_x, b_y, b_z)$. Raskime tokį atkarpos AB tašką $M(x, y, z)$, kuris ją dalija santykiu λ, $lambda > 0$:

$$|A\vec{M}| = \lambda |M\vec{B}|.$$

$\Diamond$ Vadinasi,

$$\stackrel{\rightarrow}{AM} = \lambda stackrel \rightarrow MB.$$

Koordinatėmis $(x - a_x, y - a_y, z - a_z) = \lambda(b_x - x, b_y - y, b_z - z)$. Taigi,

$$x - a_x = \lambda(b_x - x),\ y - a_y = \lambda(b_y - y),\ z - a_z = \lambda(b_z - z.$$

Iš čia

$$x = \frac{a_x + \lambda b_x}{1 + \lambda}, y = \frac{a_y + \lambda b_y}{1 + \lambda}, z = \frac{a_z + \lambda b_z}{1 + \lambda}$$

Kai $\lambda = 1$, M yra atkarpos vidurio taškas:

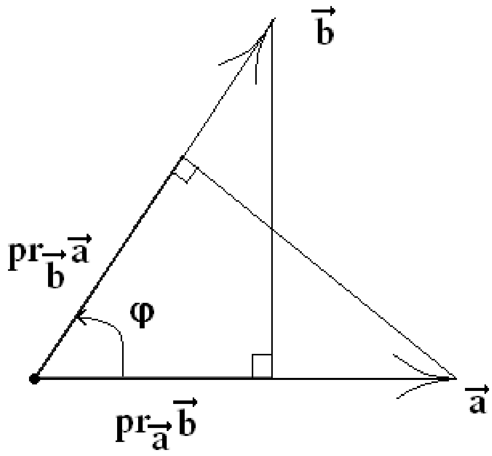
$$\frac{a_x + b_x}{2}, y = \frac{a_y + b_y}{2}, z = \frac{a_z + b_z}{2}$$

Kai $\lambda = 0$, $M = A$, M artėja prie B kai $\lim \lambda = \infty$. $\blacklozenge$

Pastaba. Kai $\lambda < 0$, taškas M "išlipa" iš atkarpos AB, bet lieka atkarpos tiesėje, o taško $M(x, y, z)$ korrdinačių formulės lieka teisingos.

1.4. Skaliarinė vektorių sandauga

Susitarkime, kad kampas φ tarp vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ yra intervale $-\pi < \varphi \leq \pi$, teigiama kampo kryptis – matuojant prieš laikrodžio rodyklę, o pagal laikrodžio rodyklę - neigiama.



5 pav. Kampas tarp vektorių

Dviejų vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ **skaliarine sandauga** vadiname jų ilgių ir kampo tarp jų kosinuso sandaugą:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi$$

Kaip nesunku matyti, skaliarinė sandauga lygi vieno iš vektorių ilgio ir kito vektoriaus projekcijos į pastarąjį sandaugai:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| \cdot pr_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot pr_{\vec{b}}\vec{a},$$

žr. 5 pav.

Skaliarinės sandaugos savybės

1. Sandauga komutatyvi: $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$.

$\Diamond$ Taip yra todėl, kad kosinusas - lyginė kampo funkcija. $\blacklozenge$

2. Sandauga yra tiesinė dauginamojo funkcija:

$(\vec{a} + \vec{b}) \bullet \vec{c} = \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{b} \bullet \vec{c}$,

$(\alpha\vec{a}) \bullet \vec{b} = \alpha(\vec{a} \bullet \vec{b})$.

$\Diamond$ Antroji lygybė akivaizdi. Pirmąją nesunku įrodyti naudojant skaliarinės sandaugos išraišką vektorių projekcijomis.$\blacklozenge$

3. $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$ tada ir tik tada, kai $\vec{a} \perp \vec{b}$ arba bent vienas iš vektorių yra nulinis vektorius $\vec{a} = \vec{0}$, arba $\vec{b} = \vec{0}$.

$\Diamond$ Situacija, kai bent vienas iš vektorių yra nulinis vektorius, akivaizdi. Tarkime, kad taip nėra. Tuomet sandauga gali būti lygi nuliui tik tada, kai $cos\varphi = 0$, t.y. $\vec{a} \perp \vec{b}$. $\blacklozenge$

Šios trys yra pagrindinės skaliarinės sandaugos savybės, kuriomis naudojantis skalairinė sandauga yra apibendrinama kitokiose erdvėse.

4. $\vec{a} \bullet \vec{a} = |\vec{a}|^2$.

$\Diamond$ Taip yra todėl, kad $cos\varphi = 1$. $\blacklozenge$

5. Jei $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ yra ortonormuotoji bazė, tai $(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij}$.[1]

$\Diamond$ Nes šie vektoriai statmeni ir vienetinio ilgio. $\blacklozenge$

6. Jei $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ ir $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ yra ortonormuotoji bazė, tai $\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

$\Diamond$ Naudodamiesi antrąja savybe, vektorius skaliariškai sudauginame panariui, po to, pasinaudojus trečiąja savybe, gauname, kad

$$(\vec{i}, \vec{i}) = (\vec{j}, \vec{j}) = (\vec{k}, \vec{k}) = 1,$$

$$(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{i}, \vec{k}) = (\vec{j}, \vec{k}) = 0,$$

ir toje skaliarinėje sandaugoje lieka tik tų pačių bazinių vektorių skaliarinių sandaugų iš savęs (lygių

[1]Priminkime, kad $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kai } i = j \\ 0, & \text{kai } i \neq j \end{cases}$ – Kronekerio simbolis.

1 dėl vienetinio vektorių ilgio), padaugintų iš atitinkamų vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ koordinačių, sumos. ⧫

Išvada 1. Kai $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ – vektoriaus koordinatės ortonormuotoje bazėje, jo ilgis

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Išvada 2. Kampo tarp vektorių kosinusas yra:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \left|\cdot \vec{b}\right|}.$$

Išvada 3. Atstumas tarp taškų $X(x_1, x_2, x_3)$ ir $Y(y_1, y_2, y_3)$ Dekarto stačiakampėje koordinačių sistemoje lygus

$$\left|\overrightarrow{XY}\right| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}.$$

Vektoriaus krypties kampai

Tarkimke, kad mūsų koordinačių sistema - stačiakampė, Dekarto. *Vektoriaus krypties kampais* vadinami jo su koordinačių ašimis sudaromi kampai. Pažymėkime tuos kampus, vektoriaus sudaromus su ašimis $Ox,\ Oy,\ Oz\ \alpha, \beta, \gamma$. Koordinačių ašyse turime tris vienetinius vektorius $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, dar vadinamus *ortais*. Tada, jei mūsų vektorius vienetinis: $|\vec{a_0}| = 1$, turime

$$\vec{a_0} \bullet \vec{i} = \cos\alpha,\ \vec{a_0} \bullet \vec{j} = \cos\beta,\ \vec{a_0} \bullet \vec{k} = \cos\gamma$$

Vadinasi,

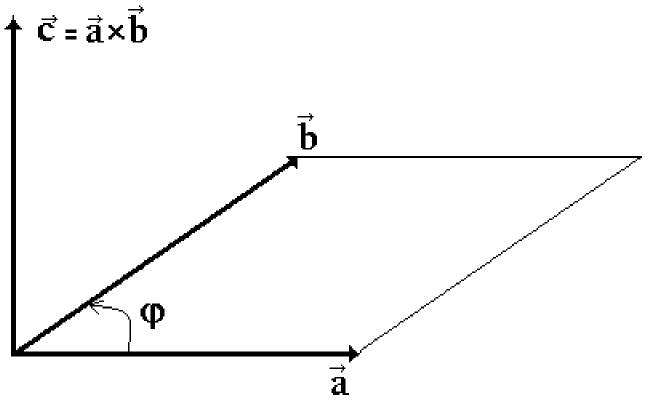
$$\vec{a_0} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

1.5. Vektorinė vektorių sandauga

Vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ *vektorine sandauga* vadinamas šiems vektoriams statmenas vektorius $\vec{c}$, kurio ilgis lygus lygiagretainio, kurio kraštines sudaro vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, plotui, o kryptis tokia, kad žiūrint iš $\vec{c}$ galo, vektorius $\vec{a}$ sutaptų su vektoriumi $\vec{b}$, pasuktu mažiausiu absoliučiu dydžiu kampu prieš laikrodžio rodyklę, žr. 6 pav. Žymime $\vec{(c)} = \vec{a} \times \vec{b}$

Jei φ kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$,

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi$$



6 pav. Vektorių vektorinė sandauga

Vektorinė sandauga yra *antikomutatyvi*:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{a} \times \vec{b}$$

Iš vektorinės sandaugos apibrėžimo gauname:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0},$$
$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k},\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i},\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$
$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k},\ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i},\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

Tarkime, kad $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, o $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, tada

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = \\ &= a_x b_x(\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y(\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z(\vec{i} \times \vec{k}) + \\ &+ a_y b_x(\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y(\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z(\vec{j} \times \vec{k}) + \\ &a_z b_x(\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y(\vec{k} \times \vec{j}) + a_z b_z(\vec{k} \times \vec{k}) = \\ &= \vec{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \vec{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \vec{k}(a_x b_y - a_y b_x) = \\ &= \vec{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Tuomet gauname dailą vektorinės vektorių sandaugos išraišką, kurią tikrai nesunku prisiminti:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

1.6. Vektorių mišrioji sandauga

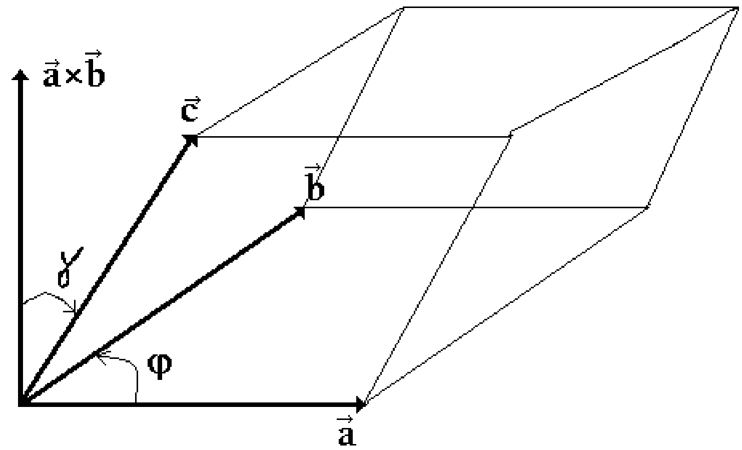
Trijų vektorių $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ *mišriąja sandauga* vadiname pirmųjų dviejų vektorinės sandaugos ir vektoriaus $\vec{c}$ skaliarinę sandaugą:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}$$

Skaičiaus $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ modulis lygus gretasienio, kurio briaunos - vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$, tūriui, žr 7 pav. Išties, vektoriaus $\vec{a} \times \vec{b}$ ilgis lygus gretasienio pagrindo plotui, o daugindami šį vektorių skaliariškai iš vektoriaus $\vec{c}$, minėtą ilgį padauginame iš vektoriaus $\vec{c}$ projekcijos į vektorių $\vec{a} \times \vec{b}$ ir gauname dydį, lygų gretasienio tūriui. Vadinasi, mišrioji nenulinių vektorių sandauga lygi nuliui tada ir tik tada, kai tas gretasienis nėra plokščias, t.y., kai vektoriai nėra lygiagretūs tai pačiai plokštumai, nėra komplanarūs.

Apskaičiuokime mišriąją sandaugą, kai $\vec{c}(c_x, c_y, c_z)$, o vektorių $\vec{a}$, $\vec{b}$ koordinatės tokios, kaip anksčiau.

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\bullet\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \bullet (c_x, c_y, c_z) = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$



7 pav. Vektorių mišrioji sandauga

2. Erdvės geometrija. Plokštumų ir tiesių lygtys

2.1. Erdvės taškų aibės ir jų lygtys

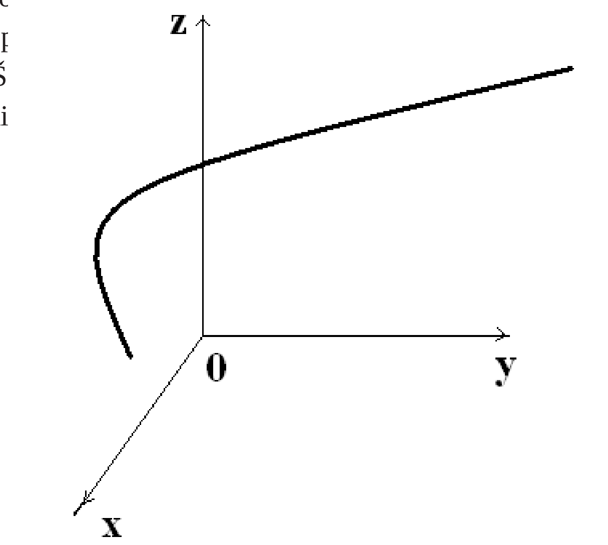
Kalbėsime apie trimatės erdvės taškų aibes, siejamas su kokiomis nors geometrinėmis sąvokomis. Tokių aibių pavyzdžiai: visi tiesės taškai, visi ploštumos taškai, pusė erdvės, esanti vienoje ploštumos pusėje, rutulys, skritulys, apskritimas, sfera, ir t.t.

Tarkime, kad erdvėje turime Dekarto koordinačių sistemą (O, x, y, z), sistemos koordinačių ašių vienetinius vektorius, kaip įprasta, žymėsim $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Sakome, kad taškas erdvės (x, y, z) turi tris |textitlaisvės laipsnius – kiekviena iš trijų jo koordinačių gali kisti laisvai, nepriklausomai nuo kitų koordinačių pokyčių.

Jei $F(x, y, z)$ – trijų kintamųjų funkcija, tai lygtis $F(x, y, z) = 0$ bendruoju atveju, sakoma, iš erdvės taško (x, y, z), tenkinančio tą lygtį, atima vieną laisvės laipsnį. Todėl šitokia lygtimi apibūdinami įvairūs *paviršiai* erdvėje. Taškai, esantys juose, turi du laisvės laipsnius, arba, kitaip sakant, paviršiai yra dviparametrinės taškų aibės: galima paviršių įsivaizduoti kaip deformuotą plokštumą ar jos dalį, o plokštuma yra dviparametrinė, dvimatė erdvės taškų aibė.

Jei norėtume lygtimi užrašyti kreivę erdvėje, žr. 8 pav., vienos tokios lygties, matyt, nepakaktų - juk kreivę galime gauti defc paviršiai susikerta kreive, todėl kreives erdvėje p lygtis $F(x, y, z) =$ 0 ir $G(x, y, z) = 0$, aibes. Š cipui: kiekviena iš lygčių iš taško (x, y, z), tenki



8 pav. Kreivė erdvėje

Pavyzdžiai.

1. Lygtis $z = 0$ yra plokštumos Oxy lygtis, nes ją tenkina visi taškai $(x, y, 0)$, o jie užpildo plokštumą Oxy. Šiuo atveju funkcija $F(x, y, z) = z$.

2. Lygtys $z = 0,\ x = 0$ yra koordinačių ašies Oy lygtys. Išties, antroji iš lygčių $G(x, y, z) = x = 0$ yra plokštumos Oyz lygtis, taškai, tenkinantys abidvi lygtis, guli abiejose plokštumose vienu metu, t.y., yra plokštumų Oxy ir Oyz susikirtimo taškai.

3. Sferos, kurios centras koordinačių pradžios taške O, o spindulys R, visi taškai (x, y, z) nutolę nuo to taško atstumu R: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$. Tai ir yra sferos lygtis, nes: visi sferos taškai (x, y, z) tenkina šią lygtį; visi taškai (x, y, z), tenkinantys šią lygtį, yra sferos taškai. Šios sferos lygtis dažniausiai užrašoma paprastesniu pavidalu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

4. Prie šios lygties pridėję lygtį $z = 0$, gautume sferos ir plokštumos Oxy susikirtimo kreivės lygtį. Toji kreivė - spindulio R apskritimas su centru koordinačių pradžioje, gulintis ploštumoje Oxy.
Jei tartume, kad aplamai $z = 0$, t.y. esame erdvės ploštumoje Oxy, į sferos lygtį įstatę $z = 0$ gautume apskritimo lygtį plokštumoje:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

5. Jei sferos centras ne koordinačių pradžios taške, o taške $C(x_0, y_0, z_0)$, jos lygtį gauname matuodami sferos taško (x, y, z) atstumą iki taško $C(x_0, y_0, z_0)$ (o ne iki $O(0, 0, 0)$, kaip anksčiau:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

6. $F(x, y) = 0,\ x, y \in R$ – kreivės plokštumoje Oxy lygtis, o $F(x, y) = 0,\ x, y, z \in R$ – paviršiaus, gauto prie tos kreivės taškų plokštumoje koordinačių pridėjus bet kokią trečiąją koordinatę z. Taigi,

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0,\ x, y, z \in R$$

– cilindro, lygiagretaus Oz ašiai, lygtis, žr. 9 pav.

Nagrinėtų pavyzdžių lygtyse parašę nelygybes, šitaip apibrėžtume erdvės taškus, esančius vienoje iš paviršių pusių.

Pavyzdžiai.

1. Nelygybė $z > 0$ reiškia puserdvės taškus, esančius virš plokštumos Oxy.

2. Nelygybė

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq R^2$$

reiškia spindulio R rutulio, kurio centras taške $C(x_0, y_0, z_0)$, taškus, įskaitant to rutulio sienos, t.y. jį gaubiančios sferos, taškus.

3. Nelygybė

$$x^2 + y^2 - R^2 > 0, \; x, y, z \in R$$

reiškia ritinio (žr. 9 pav.)išorės taškus, ritinį ribojančio cilindrinio paviršiaus taškai neįskaitomi. **4.** Nelygybė

$$x^2 + y^2 - R^2 \leq 0, \; x, y, z \in R$$

reiškia 9 pav. ritinio vidaus taškus, ritinį ribojančio cilindrinio paviršiaus taškai neįskaitomi.

2.2. Parametrinės lygtys

Ligšiol tiek paviršių, tiek kreivių lygtis rašėm apribodami taško koordinačių kitimo laisvę lygtimis.

Kitas būdas "priversti" tašką (x, y, z) būti reikiamoje aibėje - užrašyti jo koordinačių priklausomybę $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), \; u, v \in R$ nuo papildomų kintamųjų u, v, vadinamų *parametrais*, tokią, kad, kintant parametrams, taškas $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ būtų reikiamoje geometrinėje erdvės aibėje. Tokios lygtys $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ vadinamos *parametrinėmis lygtimis*.

Šiose lygtyse matome du parametrus, taigi, jos, matyt, dviparametrės aibės, t.y., paviršiaus lygtys. Lygtys $x = x(t), y = y(t), z = z(t), \; t \in R$ reikštų vienparametrę aibę, kreivę.

Pavyzdžiai.

1. $x = R\cos t, \; y = R\sin t, z = 1, \; -\pi < t \leq \pi$

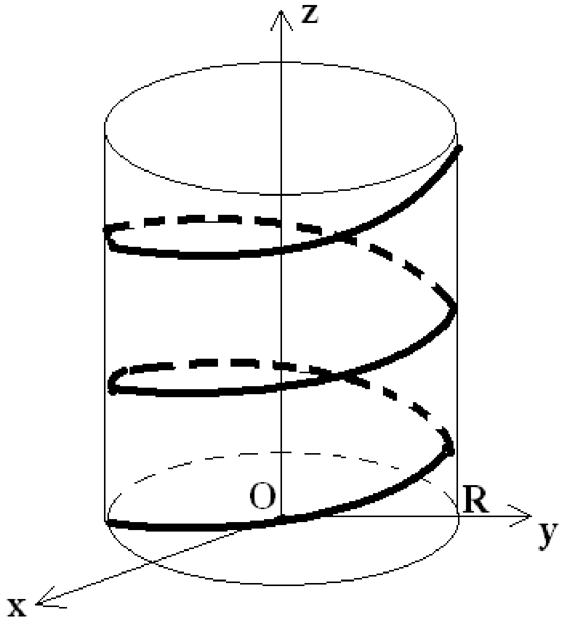
– spindulio R apskritimo, esančio plokštumoje $z = 1$, kurio centras taške $(0, 0, 1)$, lygtis. Nesunku

tai suprasti, nes
$$x^2 + y^2 = (R\cos t)^2 + (R\sin t)^2 = R^2$$
.

2. $x = R\cos u,\ y = R\sin u, z = v,\ -\pi < u \leq \pi,\ v \in R$
– spindulio R cilindro, kurio ašis Oz ašis, žr. 9 pav., lygtis. Išties, didėjant parametro u reikšmei intervale $-\pi < u \leq \pi$, taškas $x = R\cos u,\ y = R\sin u$, esantis Oxy plokštumoje, bėga spindulio R apskritimu prieš laikrodžio rodyklę, o, augant v reikšmei, erdvės taškas $x = R\cos u,\ y = R\sin u, z = v$ kyla cilindro iš 9 pav. paviršiumi.
3. $x = R\sin\gamma\cos\varphi,\ y = R\sin\gamma\sin\varphi, z = R\sin\gamma, \pi < \varphi \leq \pi,\ -\pi/2 < \gamma \leq \pi/2$ – spindulio R sferos, kurios centras koordinačių pradžios taške, lygtis. Parametrų vaidmenyje – *sferinių koordinačių* kampai φ, γ. Išties, tuomet
$$x^2 + y^2 + z^2 = (R\sin\gamma\cos\varphi)^2 + (R\sin\gamma\sin\varphi)^2 + (R\sin\gamma)^2 = (R\cos\gamma)^2 + (R\sin\gamma)^2 = R^2$$

4. $x = x_0 + R\sin\gamma\cos\varphi,\ y = y_0 + R\sin\gamma\sin\varphi, z = z_0 + R\sin\gamma, \pi < \varphi \leq \pi,\ -\pi/2 < \gamma \leq \pi/2$ – spindulio R sferos, kurios centras taške $C(x_0, y_0, z_0)$, lygtis. Nes dabar, žr. praeitą pavyzdį,
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \ldots = R^2$$

5. $x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ z = at,\ t \in R$. Tai – *sraigtinės kreivės* parametrinės lygtys. Ji guli spindulio r cilindre, žr. 9 pav. Išties, jei nekreiptume dėmesio į aplikatę z, $(x = r\cos t,\ y = r\sin t)$ būtų apskritimo iš pirmojo pavyzdžio taškas. Bet, augant parametrui t, koordinatė $z = at$ kinta (auga jei $a > 0$ ir mažėja jei $a < 0$), todėl taškas $(x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ z = at)$ juda paveikslėlyje pavaizduota spirale atitinkamai aukštyn arba žemyn.



9 pav. Sraigtinė kreivė ir cilindrinis paviršius

5. Tiesės, einančiuos per koordinačių pradžios tašką, parametrinės lygtys:

$$x = at,\ y = bt, z = ct,\ t \in R.$$

Išties šis taškas yra vektoriaus $t(a, b, c)$ viršūnė, kintant parametrui t, jis juda tiese, kurioje guli vektorius (a, b, c).

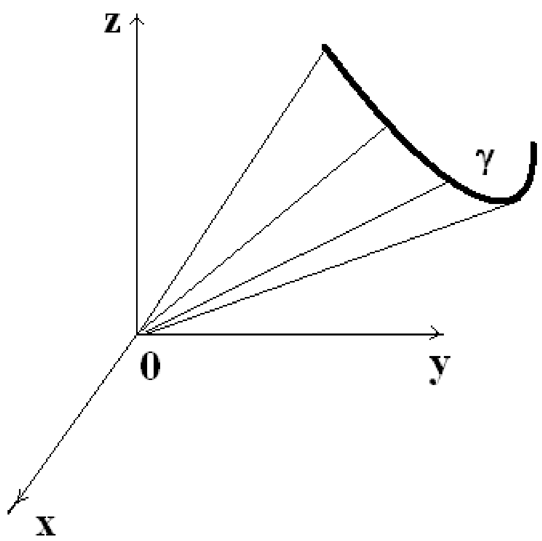
6. Parametrinės lygtys su dviem parametrais:

$$x = vf(u),\ y = vg(u), z = vh(u),\ u, v \in R.$$

Vadinasi, tai – paviršiaus parametrinės lygtys. Pabandykime išsiaiškinti, kokio paviršiaus.

Įsivaizduokime, kad v reikšmė nekinta, užfiksuota. Tada taškas $(x = vf(u),\ y = vg(u), z = vh(u))$, kintant u, juda kreive erdvėje, tokia, kokia pavaizduota 8 ar 10 pav., čia ji pažymėta raide γ.

Jei fiksuota u reikšmė, o v kinta, kaip matyti iš iš 5-to pavyzdžio, taškas $(x = vf(u),\ y = vg(u), z = vh(u))$ juda tiese, einančia per koordinačių pradžią (tiese, kurioje guli vektorius $(f(u), g(u), h(u$
Vadinasi, paviršius – kūgis, koks pavaizduotas 10 pav.



10 pav. Kūgis

2.3. Tiesių ir plokštumų lygtys

Bendrosios plokštumos ir tiesės plokštumoje lygtys

Žinome, kad funkcija $f(x,y,z) = ax + by + cz$ yra kintamųjų x, y, z *tiesinė* funkcija, todėl lygtis $ax + by + cz = d$ vadinama *tiesine lygtimi*.

Tarkime, kad plokštuma P eina per taška $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ir yra statmena vektoriui $\vec{n} = (a,b,c)$, vadinamą plokštumos *normaliuoju vektoriumi*, arba *normale*. Akivaizdu, kad žinodami plokštumos tašką ir jai statmeną vektorių, plokštumą apibrėžiame vienareikšmiškai. Tuomet $\overrightarrow{OM_0}= (x_0, y_0, z_0)$. Tegul $M(x,y,z)$ - bet kuris plokštumos taškas. Tuomet vektorius $\overrightarrow{M_0M}$ visuomet yra statmenas plokštumos P normalei. Vadinasi, vektorių $\overrightarrow{OM}= (x,y,z)$ ir $\vec{n} = (a,b,c)$ skaliarinė sandauga lygi nuliui:

$$\overrightarrow{M_0 M} \bullet \vec{n} = 0.$$

Koordinatėmis:

$$(x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0,$$

arba

$$ax + by + cz + d = 0, \quad d = -ax_0 - by_0 - cz_0.$$

Ši lygtis vadinama *bendrąja plokštumos lygtimi*.

Pakartoję visus samprotavimus tiesei plokštumoje, įvedę tiesės normalės $\vec{n} = (a, b)$, kaip statmeno tiesei vektoriaus, sąvoką, visiškai analogiškai gauname *bendrąją tiesės lygtį*:

$$ax + by + c = 0,$$

čia $c = -ax_0 - by_0$, kur $M_0(x_0, y_0)$ – iš anksto žinomo tiesės taškas. Ši lygtis bendrąja vadinama todėl, kad tokiu pavidalu galime užrašyti bet kokios tiesės plokštumoje lygtį, tame tarpe ir lygiagrečios Oy ašiai tiesės $x = c*$, ko negalime padaryti naudodami mokykloje įprastą tiesės lygties pavidalą $y = kx + b$.

kaip matome, ir plokštumos, ir tiesės plokštumoje lygtys yra tiesinės.

Pavyzdys

Raskime plokštumos, einančios per tašką $M_0(1, 2, 3)$ ir lygiagrečios plokštumai $x - y + 5 = 0$ lygtį. $\Diamond$ Plokštumos $x - y + 5 = 0$ normalusis vektorius yra $\vec{n} = (1, -1, 0)$, jis tinka būti ir ieškomosios plokštumos normaliuoju vektoriumi. Taigi, ieškomosios plokštumos lygtis $x - y + d = 0$, įstatę plokštumos taško $M_0(1, 2, 3)$ koordinates, randame $d = 1$. vadinasi, ieškomos plokštumos lygtis yra $x - y + 1 = 0$. ⧫

Parametrinės plokštumos lygtys

Tarkime, kad plokštuma P eina per tašką $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ir yra žinomi du jai lygiagretūs nekolinearūs vektoriai $\vec{s^1} = (l_1, m_1, n_1)$ ir $\vec{s^2} = (l_2, m_2, n_2)$. Suprantama, kad šitokių duomenų pakanka plokštumai vienareikšmiškai apibrėžti.

Jei $M(x,y,z)$ – bet kuris plokštumos P taškas, vektorius $\overrightarrow{M_0M}$ yra plokštumoje P ir gali būti išreikštas vektorių $\vec{s_1}$, $\vec{s_2}$ tiesiniu dariniu:

$$\overrightarrow{M_0M}= t_1\vec{s_1} + t_2\vec{s_2}.$$

Iš čia plokštumos P *parametrinės lygtis*:

$$\begin{cases} x - x_0 = t_1 l_1 + t_2 l_2, \\ y - y_0 = t_1 m_1 + t_2 m_2, \\ z - z_0 = t_1 n_1 + t_2 n_2, \qquad t \in R. \end{cases}$$

Parametrinės ir kanoninės tiesės erdvėje lygtys

Tarkime, kad tiesė T eina per tašką $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ir yra lygiagreti vektoriui $\vec{s} = (l, m, n)$, vadinamam *tiesės krypties vektoriumi*. Tada bet kuriam tiesės T taškui $M(x,y,z)$, vektoriai $\overrightarrow{AM}\ \ (ir)\ \vec{r}$ yra lygiagretūs. Taigi,

$$\overrightarrow{M_0M}= t\vec{s},\ t \in R$$

Iš čia gauname tiesės T *parametrines lygtis*:

$$\begin{cases} x - x_0 = tl, \\ y - y_0 = tm, \\ z - z_0 = tn, \qquad t \in R \end{cases}$$

Kiekvienoje iš lygčių išreiškę patrametrą t ir tas išraiškas sulyginę, gauname *kanonines tiesės erdvėje lygtis*:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

Kanoninės tiesės erdvėje lygtys yra dvi:

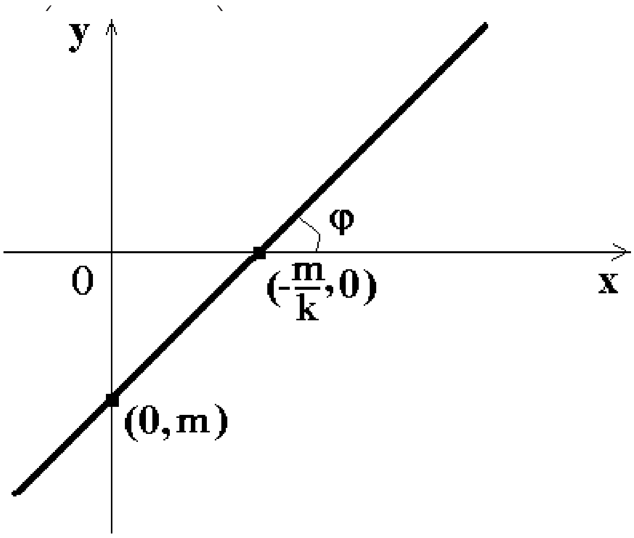
$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m},\ \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

Pertvarkę jas įprastu pavidalu, gautume dviejų plokštumų bendrąsias lygtis, tik pirmojoje koeficientas prie kintamojo z, o antrojoje – prie x lygus nuliui. Vadinasi, kanoninės tiesės erdvėje lygtys - dviejų plokštumų, kurios kertasi tiese, lygtys.

Šitaip tiesė erdvėje gali būti apibrėžta ir bendruoju atveju:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Šios lygtys reiškia tiesę erdvėje, jei jomis aprašomos dvi plokštumos kertasi, t.y., nėra lygiagrečios. Tai reiškia, kad jų normalių vektoriai $\vec{n_1}(a_1, b_1, c_1)$ ir $\vec{n_2}(a_2, b_2, c_2)$ nėra lygiagretūs, jų koordinatės nėra proporcingos. Iš tiesinės algebros kurso žinoma, kad tokiu atveju iš tų koordinačių sudarytos matricos rangas lygus dviem:



Tuomet šią dviejų plokštu ... e-
nčias kanonines arba para

11 pav. Tiesė plokštumoje

Visiškai analogiškai, kaip gavome kanonines tiesės ervėje lygtis, galime gauti šitokį tiesės plokštumoje lygties pavidalą:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

Pažymėję $a = m$, $b = -l$, gauname tiesės plokštumoje lygtį

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

arba, bendrosios tiesės lygties pavidalu,

$$ax + by + c = 0, \quad c = -ax_0 - by_0.$$

Tarkime, kad $b \neq 0$, tada tiesės lygtį galima užrašyti šitaip:

$$y = kx + m, \quad k = -\frac{a}{b},\ b = -\frac{c}{b}.$$

Koeficientas $k = \tan\varphi$ vadinamas *tiesės krypties koeficientu*. Kampas tarp dviejų tiesių $y = k_1 x + m_1$ ir $y = k_2 x + m_2$ plokštumoje $\gamma = \varphi_2 - \varphi_1$ ir gali būti apskaičiuotas taip:

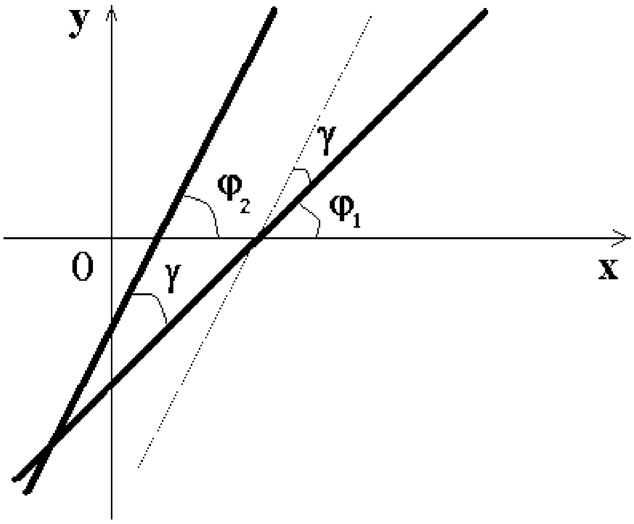
$$\tan\gamma = \frac{\tan\varphi_2 - \tan\varphi_1}{1 + \tan\varphi_1 \tan\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Tiesės yra statmenos, kai $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ arba $\tan\gamma = \infty$. Taigi turime $1 + k_1 k_2 = 0$ arba

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

Tiesės yra lygiagrečios, kai $\gamma = 0$, t. y.

$$k_1 = k_2$$



12 pav. Kampas tarp tiesių plokštumoje

Kampas tarp dviejų plokštumų

Dviejų plokštumų sudaromas kampas lygus jų normaliųjų vektorių (normalių) sudaromam kampui. Tarkime, kad turime dvi plokštumas P_1 ir P_2, mo jų normalieji vektoriai yra $\vec{n}_1(a_1, b_1, c_1)$ ir $\vec{n}_2(a_2, b_2, c_2)$. Plokštumų P_1 ir P_2 bendrosios lygtys yra

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

o kampo tarp normaliųjų vektorių kosinusas

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2 + {c_1}^2} \times \sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2 + {c_2}^2}}$$

Vadinasi, plokštumos statmenos tada kai

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

Plokštumos yra lygiagrečios, kai jų normalieji vektoriai yra lygiagretūs, o tokių vektorių koordinatės proporcingos. Vadinasi, plokštumų lygiagretumo sąlyga:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Pastaba. Kampas tarp tiesių plokštumoje, kai turime jų bendrąsias lygtis, gali būti randamas visiškai taip pat, kaip tarp plokštumų erdvėje – kaip kampas tarp tiesių normalių.

2.4. Įvairiai apibrėžtų tiesių ir plokštumų lygtys

Yra žinomi du tiesės taškai

Tiesei apibūdinti pakanka žinoti du jos taškus. Parašykime tiesės erdevėje, einančios per du taškus $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ir $M_2(x_2, y_2, z_2)$, lygtis. Akivaizdu, kad tiesės krypties vektoriumi gali būti $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Tuomet galime parašyti tiesės kanonines lygtis, duotuoju tiesės tašku pasirinkę bet kurį vieną iš dviejų žinomų taškų, pavyzdžiui, $M_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Pasirinkę tašką $M_2(x_2, y_2, z_2)$, gautume kitokias, bet ekvivalenčias pirmosioms tiesės lygtis:

$$\frac{x - x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_2}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_2}{z_2 - z_1}$$

Yra žinomi trys plokštumos taškai

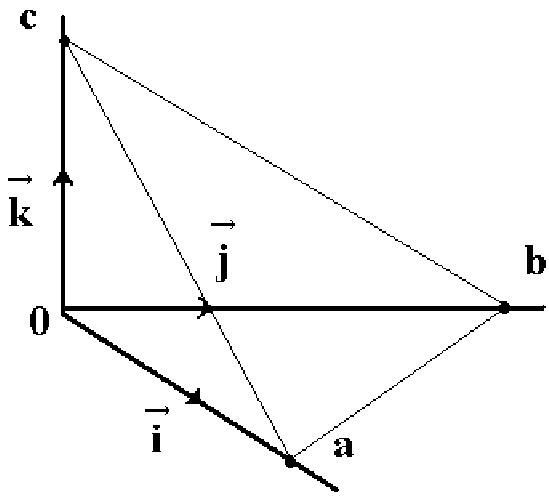
Tarkime, kad plokštuma eina per tris taškus $M_1(x_1, y_1, z_1)$,
$M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Jei jie neguli vienoje tiesėje, to pakanka plokštumai apibūdinti vienareikšmiškai. Jei $M(x, y, z)$ – bet kuris plokštumos taškas, vektoriai $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ ir $\overrightarrow{M_1M_3}$ yra duotosios plokštumos vektoriai. vadinasi, jų mišrioji sandauga lygi nuliui:

$$\left(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right) = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Išskleidę determinantą pirmąja eilute ir algebriškai sutvarkę reiškinį, gautume bendrąją plokštumos lygtį.

Yra žinomi plokštumos susikirtimo su koordinačių ašimis taškai

Tarkime, ploštuma kerta koordinačių ašis taškuose $a, 0, 0$, $0, b, 0$ ir $0, 0, c$, žr. 13 pav.



13 pav. Žinomi plokštumos susikirtimo su koordinačių ašimis taškai

Tada jos lygtis, duotuoju tašku pasirinkus tašką $a, 0, 0$, yra

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

Išskleidę determinantą pirmąja eilute ir sutvarkę lygtį, gauname:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Analogiškai gauname tiesės iš 11 pav. lygtį

$$-\frac{kx}{m} + \frac{y}{m} = 1$$

2.5. Kampas tarp tiesės ir plokštumos

Tarkime, tiesė erdvėje duota kanonine lygtimi

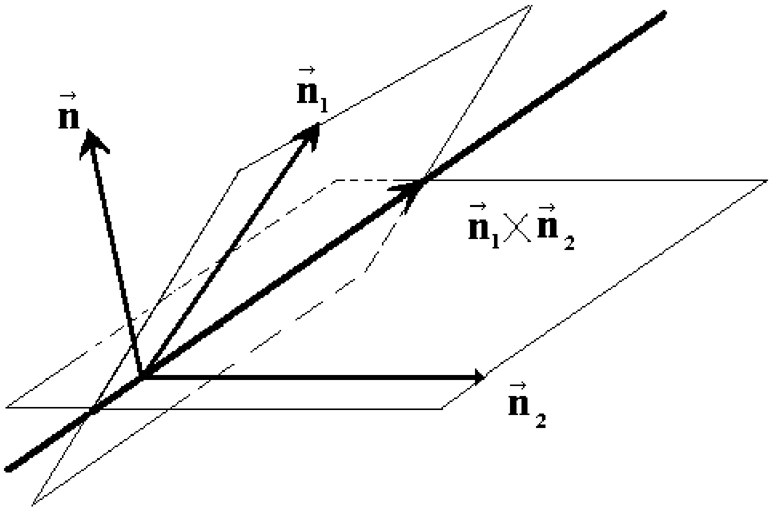
$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

o plokštuma – bendrąja lygtimi:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Tuomet žinome plokštumos normalę $\vec{n}(a, b, c)$ ir tiesės krypties vektorių $\vec{s}(l, m, n)$. Kampo tarp tiesės ir plokštumos α bei kampo tarp $\vec{n}$ ir $\vec{s}$ φ suma lygi π, vadinasi

$$\sin\alpha = \cos\varphi = \frac{al + bm + cn}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$



14 pav. Tiesė, kaip plokštumų susikirtimo tiesė

Tarkime, kad tiesė duota kaip dviejų plokštumų susikirtimo tiesė, žr. 14 pav.:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Tada vektoriumi $\vec{s}$ galima būti šių plokštumų normaliųjų vektorių $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ir $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ vektorinė sandaugą

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Išskleidę determinantą pirmąja eilute, rastume tiesės krypties vektoriaus $\vec{s}$ koordinates – jos lygios pirmosios determinanto eilutės elementų adjunktams. Įrašykime į pirmąją determinanto eilutę trečios plokštumos $ax + by + cz + d = 0$ normalės koordinates ir pareikalaukime

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

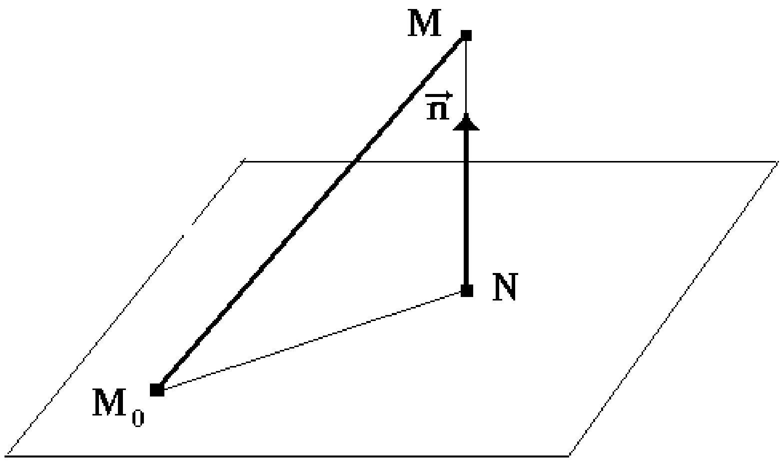
Dabar vektorių $\vec{s}$ ir $\vec{n}(a, b, c)$ skaliarinė sandauga lygi nuliui, vadinasi jie statmeni. Vadinasi, tiesė lygiagreti plokštumai $ax + by + cz + d = 0$. Gavome tiesės ir plokštumos lygiagretumo sąlygą, kai tiesė duota kaip dviejų kitų plokštumų susikirtimo tiesė.

2.6. Taško atstumas iki plokštumos ir tiesės

Tarkime, kad plokštumos duota bendrąja lygtimi

$$ax + by + cz + d = 0$$

Raskime taško $M(x, y, z)$ atstumą nuo šios plokštumos. Tarkime, kad žinome plokštumos taško $M_0(x_0, y_0, z_0)$ koordinates. Pavadinkime taško $M(x, y, z)$ projekciją plokštumoje $N(x*, y*, z*)$, žr. 15 pav.



15 pav. Taško atstumas iki plokštumos

Akivaizdu, kad taško $M(x, y, z)$ atstumas iki plokštumos

$$| \overrightarrow{NM} | = |\vec{n}_0 \bullet \overrightarrow{M_0M} |,$$

kur $\vec{n}_0$ yra vektoriaus $\vec{n}$ vienetinis vektorius (lygiagretus $\vec{n}$, bet vienetinio ilgio vektorius). Vadinasi,

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n}.$$

Apskaičiuokime skaliarinę sandaugą

$$\vec{n}_0 \bullet \overrightarrow{M_0M} = \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c) \right) \bullet (x - x_0, y - y_0, z - z_0) =$$

$$\frac{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{ax + by + cz) - (ax_0 + by_0 + cz_0)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Taškas M_0 yra plokštumos taškas, taigi, jo koordinatės (x_0, y_0, z_0) tenkina jos lygtį:

$$ax_0 + by_0 + cz_0 = -d$$

. Vadinasi, taško $M(x, y, z)$ atstumas iki plokštumos lygus

$$| \overrightarrow{NM} | = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Visiškai analogiškai, plokštumos taško $M(x, y)$ atstumas iki tiesės, duotos bendrąja lygtimi $ax + by + c = 0$, lygus

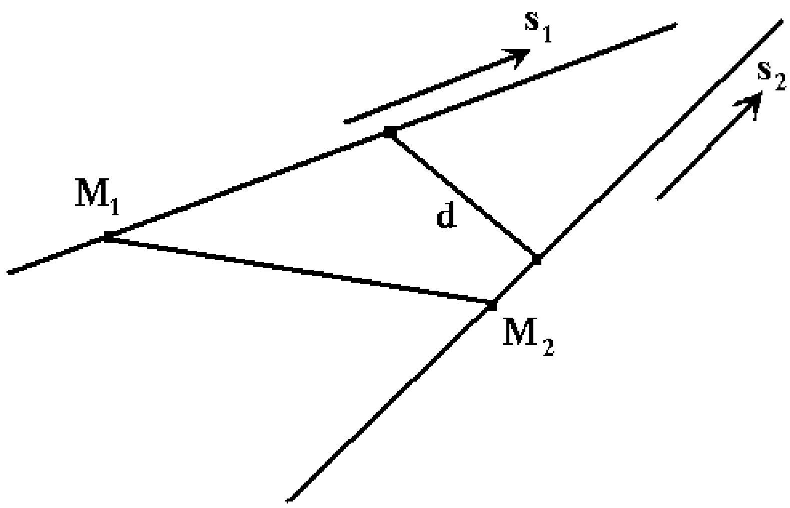
$$h = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Panašiai apskaičiuojamas atstumas tarp dviejų nelygiagrečių tiesių erdvėje. Jei jos duotos kanoninėmis lygtimis

$$\frac{x - x_{10}}{l_1} = \frac{y - y_{10}}{m_1} = \frac{z - z_{10}}{n_1},$$

$$\frac{x - x_{20}}{l_2} = \frac{y - y_{20}}{m_2} = \frac{z - z_{20}}{n_2},$$

o jų krypties vektoriai $\vec{s_1}(l_1, m_1, n_1)$ ir $\vec{s_2}(l_2, m_2, n_2)$ nelygiagretūs. Vadinasi, taškas $M_1(x_{10}, y_{10}, z_{10})$ yra pirmosios tiesė ... ygus vektoriaus $\vec{s_1} \times \vec{s_2}$ vie ... i, žr. 16 pav.



16 pav. Atstumas tarp nelygiagrečių tiesių

Turime:

$$d = \frac{\left|(\overrightarrow{M_2M_1}, \vec{s}_1, \vec{s}_2)\right|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|},$$

čia $(\overrightarrow{M_2M_1}, \vec{s}_1, \vec{s}_2)$ – trijų vektorių mišrioji sandauga.

Skyrius 1

Elipsė, hiperbolė ir parabolė

Skyriuje pateikiama Kęstučio Karčiausko iš Vilniaus universtiteto Matematikos ir Informatikos fakulteto paskaitų konspekto medžiaga.

1. Elipsės ir hiperbolės apibrėžimas

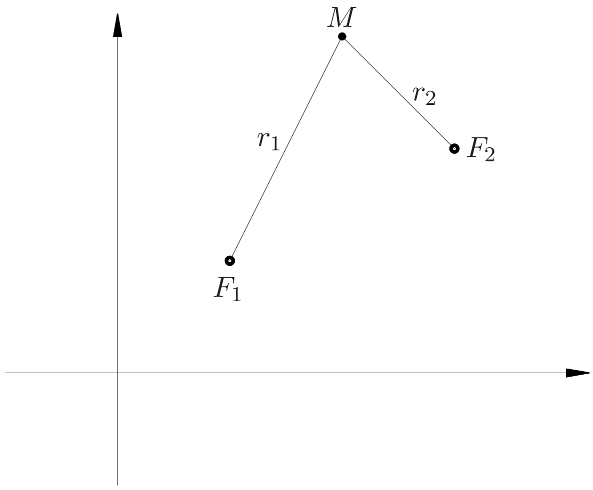
Tarkime plokštumoje yra fiksuoti du taškai F_1 ir F_2, kurie vadinami *židiniais*. Bet kokiam taškui M atstumus iki židinių F_1 ir F_2 žymime atitinkamai r_1 ir r_2, t.y. $r_1 = |F_1M|$, $r_2 = |F_2M|$ (žr. Pav. 1.1). Atstumą tarp židinių pažymime $2c$, t.y. $|F_1F_2| = 2c$. Dar yra fiksuojamas teigiamas skaičius, kuris žymimas $2a$.

Apibrėžimas 1 *Tarkime $a > c$. Elipse vadinama aibė plokštumos taškų M, kurių atstumų iki židinių suma yra pastovi ir lygi $2a$, t.y.*

$$r_1 + r_2 = 2a \, .$$

Apibrėžimas 2 *Tarkime $a < c$. Hiperbole vadinama aibė plokštumos taškų M, kurių atstumų iki židinių skirtumo absoliutus dydis yra pastovus ir lygus $2a$, t.y.*

$$|r_1 - r_2| = 2a \, .$$



1.1: Kreivės židiniai

Jei židiniai sutampa, t.y. $F_1 = F_2$, elipsės atveju gauname apskritimą su centru F_1 bei spinduliu a.

Skaičius $e = \frac{c}{a}$ vadinamas kreivės *ekscentricitetu*. Iš apibrėžimo seka, kad

- elipsei $0 \leq e < 1$ ir tik apskritimui ($|F_1F_2| = 2c = 0$) $e = 0$;
- hiperbolei $e > 1$.

2. Kanoninė koordinačių sistema bei kanoninės elipsės ir hiperbolės lygtys

Mes jau tur būt įpratę, kad sprendimui (pratimui pratybose ar kokios tai įmantresnės problemos gvildenimui kompiuteriu) geometriniai duomenys (taškai, tiesių lygtys ...) gaunami koordinatiniame pavidale. Tai reiškia, kad jau yra fiksuota koordinačių sistema, patogi duomenų pateikimui (pavyzdžiui monitoriaus koordinačių sistema). Darbo rezultatus dažniausiai reikia pateikti šioje koordinačių sistemoje. Teoriniam kreivių (elipsės, hiperbolės) tyrimui "vartotojo" sistema yra nepatogi. Todėl pradinė *vartotojo* sistema $O_{vart}x_{vart}y_{vart}$ pakeičiama *kanonine* koordinačių sistema $O_{kan}x_{kan}y_{kan}$ (žr. Pav. 1.2), kuri sudaroma gana paprastai:

- kordinačių pradžia O_{kan} yra atkarpos F_1F_2 vidurys;
- ašis x_{kan} eina per židinius; jos teigiama kryptis nukreipta nuo F_1 link F_2;
- ašis y_{kan} statmena ašiai x_{kan}.

Kanoninę koordinačių sistemą žymėsime tiesiog Oxy. Šioje koordinačių sistemoje $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$. Todėl bet kokiam taškui $M(x;y)$ teisinga

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Įstatę šias išraiškas į $r_1 + r_2 = 2a$ arba $|r_1 - r_2| = 2a$ gauname atitinkamai elipsės ir hiperbolės "lygtis". Taip sudarytus reiškinius nekuklu paskelbti kreivių *lygtimis*, nes jų analizinė forma yra komplikuota ir nepritaikyta efektyviam kreivių tyrimui. Šių reiškinių prastinimas yra gana paprastas ir primena iš mokyklos laikų žinomą irracionalių lygčių prastinimą:

(1) pradinį reiškinį parašome pavidale

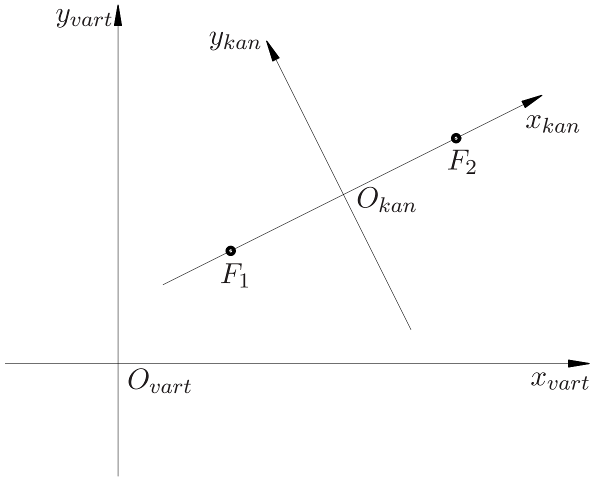
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{(elipsei)}\ ,$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{(hiperbolei)}$$

ir keliame kvadratu;

(2) gautą išraišką suprastiname ir, palikę dešinėje pusėje tik kvadratinę šaknį, dar sykį keliame kvadratu;

(3) šiek tiek pasikuitę su gana paprastom išraiškom, abiem – elipsės ir hiperbolės – atvejais gauname

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)\ ; \tag{1.1}$$



1.2: Kanoninė koordinačių sistema

(4) pažymėję

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad \text{elipsei,} \tag{1.2}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad \text{hiperbolei,} \tag{1.3}$$

bei padaliję lygtį (1.1) iš jos dešiniosios pusės, gauname elipsės ir hiperbolės kanonines lygtis.

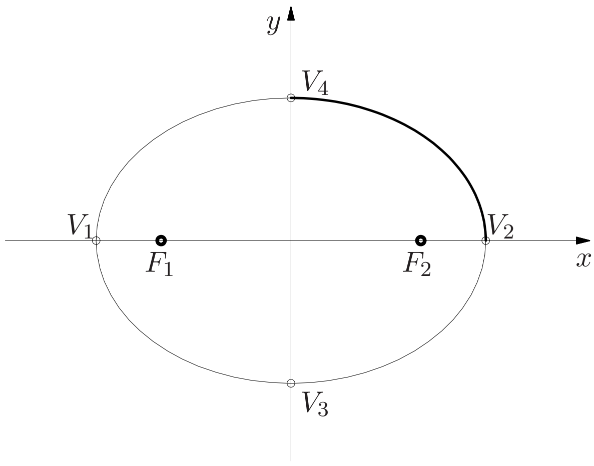
Elipsės kanoninė lygtis

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1.4}$$

Hiperbolės kanoninė lygtis

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1.5}$$

Kanoninės lygtys (1.4), (1.5) yra paprastos ir patogios tolimesniam kreivių tyrimui. Bet liko vienas kabliukas, kuris formaliai dar neleidžia jas vadinti kreivių lygtimis – mes tik parodėme, kad



1.3: Elipsė ir jos viršūnės

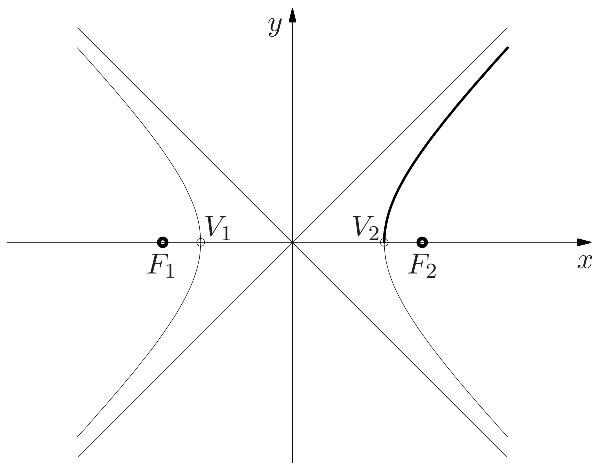
elipsės ar hiperbolės taško koordinatės tenkina atitinkamos kreivės kanoninę lygtį. Bet gal yra tokių taškų, kurių koordinatės tenkina kreivės kanoninę lygtį, bet jai pačiai nepriklauso?! Mokyklinė irracionalių lygčių prastinimo patirtis, keliant jas kvadratu, įspėja kad iš tikro taip gali būti. Laimei, šito neatsitinka. Tai bus gana greitai įrodyta. Bet nelaukdami šio formalaus patvirtinimo jau dabar ištirsime elipsės ir hiperbolės formą.

3. Elipsės formos tyrimas

Kadangi

$$\frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

taškas $M'(-x, y)$, simetriškas elipsės taškui $M(x, y)$ atžvilgiu y ašies, taip pat priklauso elipsei. Analogiškai gauname, kad x ašis irgi yra elipsės simetrijos ašis, o koordinačių pradžia – elipsės simetrijos centras. Taigi užtenka ištirti elipsės formą pirmajame ketvirtyje. Jame elipsė yra funkcijos $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ grafikas. Jo forma tiriama pasitelkus išvestines. Tyrimo rezultatą matote Pav.1.3.



1.4: Hiperbolės viršūnės ir asimptotės

Taškai $V_1 = (-a; 0)$, $V_2 = (a; 0)$, $V_3 = (0; -b)$, $V_4 = (0; b)$ vadinami elipsės *viršūnėmis*. Atkarpa V_1V_2 yra elipsės *didžioji* ašis, o V_3V_4 – *mažoji* ašis.

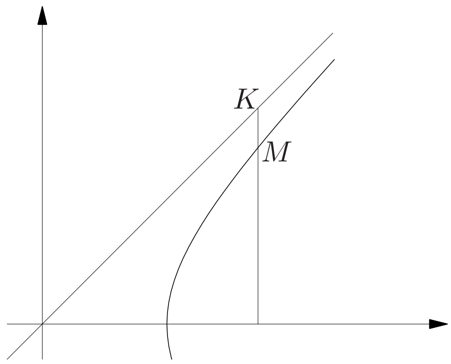
4. Hiperbolės formos tyrimas; asimptotės

Kaip ir elipsės atveju, įrodome, kad x ir y yra hiperbolės simetrijos ašys, o koordinačių pradžia – simetrijos centras. Todėl užtenka ištirti hiperbolės formą pirmajame ketvirtyje. Jame hiperbolė yra funkcijos $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ grafikas. Jo forma tiriama naudojant išvestines. Tyrimo rezultatą matote Pav. 1.4.

Taškai $V_1 = (-a; 0)$, $V_2 = (a; 0)$ vadinami hiperbolės *viršūnėmis*. Atkarpa V_1V_2 yra hiperbolės *realioji* ašis.

Atidesnis studentas tur būt pajuto, kad Pav. 1.4 yra informacijos, kurios sekdami tik išvestinių ženklus, negautume – hiperbolė, "keliaudama į begalybę", artėja prie dviejų tiesių. Formuluojame šią savybę tiksliau.

Apibrėžimas 3 *Hiperbolės asimptotėmis vadinamos tiesės, kurių lygtys kanoninėje koordinačių sis-*



1.5: Artėjimas prie asimptotės

temoje yra $y = \frac{b}{a}x$ *ir* $y = -\frac{b}{a}x$.

Pažymėkime M ir K atitinkamai hiperbolės bei asimptotės taškus pirmajame ketvirtyje, kurių pirmoji koordinatė yra x (žr. Pav. 1.5). Kadangi $M = (x; \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2})$, $K = (x, \frac{b}{a}x)$ ir $\sqrt{x^2 - a^2} < x$, taškas M yra žemiau asimptotės $y = \frac{b}{a}x$. Be to

$$|MK| = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

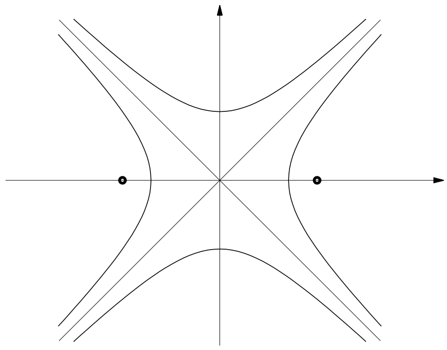
Todel $|MK|$ monotoniškai artėja į 0.

5. Jungtinė hiperbolė

Hiperbolė, *jungtinė* hiperbolei $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, apibrėžiama lygtimi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Jungtinės hiperbolės asimptotės sutampa su originalios hiperbolės asimptotėmis (žr. Pav. 1.6). Tai įrodoma labai paprastai. Nepraleiskite šio įrodymo, nes jame naudojamas koordinačių ašių sukeitimo principas labai pravers sprendžiant daugelį uždavinių.



1.6: Hiperbolė ir jai jungtinė.

Įrodymas. Padauginę jungtinės hiperbolės lygtį iš -1 ir pažymėję $x = y'$, $y = x'$ gauname

$$\frac{x'^2}{b^2} - \frac{y'^2}{a^2} = 1.$$

Ši lygtis yra jungtinės hiperbolės kanoninė lygtis *kanoninėje* koordinačių sistemoje $x'y'$. Todėl jos asimptotės nusakomos lygtimis $y' = \pm\frac{a}{b}x'$. Grižus į xy koordinačių sistemą šios lygtys įgyja pavidalą $y = \pm\frac{b}{a}x$.

6. Hiperbolės asimptotinė lygtis

Kadangi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \Big(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\Big)\Big(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\Big),$$

hiperbolės lygtį $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ galime parašyti pavidale $L_1L_2 = k$, kur $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ yra asimptočių lygtys, o k – nenulinė konstanta. Šią asimptotinę hiperbolės lygties formą vartojame, kai žinome hiperbolės asimptotes. Konstantą k randame naudodami papildomą uždavinio salygą.

7. Kreivės taško atstumai iki židinių

Tarkime plokštumos taško $M(x;y)$ koordinatės tenkina elipsės arba hiperbolės kanoninę lygtį. Parodysime, kad taškas M priklauso elipsei arba hiperbolei.

Pradžioje suskaičiuojame atstumą $r_1 = |F_1M|$. Tai darome vienu metu abiem kreivėms (viršutinis ženklas elipsės lygties atveju, apatinis – hiperbolės). Kadangi

$$r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2xc + c^2 \mp \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = \frac{a^2 \mp b^2}{a^2}x^2 + 2xc + c^2 \pm b^2,$$
$$= e^2 + 2xea + a^2 = (ex+a)^2,$$

$r_1 = |ex + a|$. Panašiai gauname $r_2 = |ex - a|$.

- *Elipsės lygties atvejis.* Kadangi $e < 1$ ir $-a \leq x \leq a$, tai $r_1 = ex + a$, $r_2 = a - ex$. Todėl $r_1 + r_2 = 2a$.
- *Hiperbolės lygties atvejis.* Šiuo atveju $e > 1$.

  (1) Jei $x \geq a$, tai $r_1 = ex + a$, $r_2 = ex - a$. Todėl $r_1 - r_2 = 2a$.

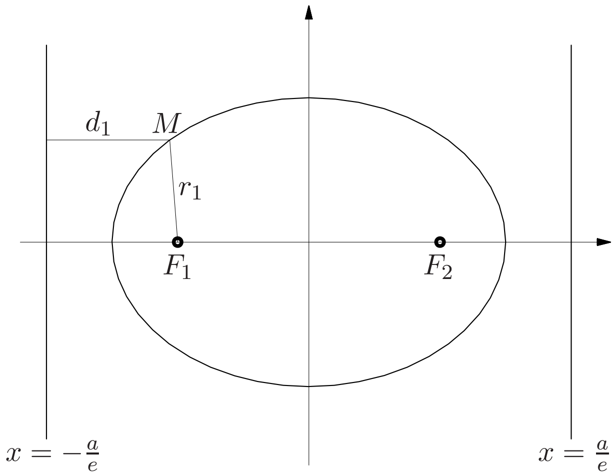
  (2) Jei $x \leq -a$, tai $r_1 = -ex - a$, $r_2 = -ex + a$. Todėl $r_1 - r_2 = -2a$.

8. Elipsės ir hiperbolės direktrisės

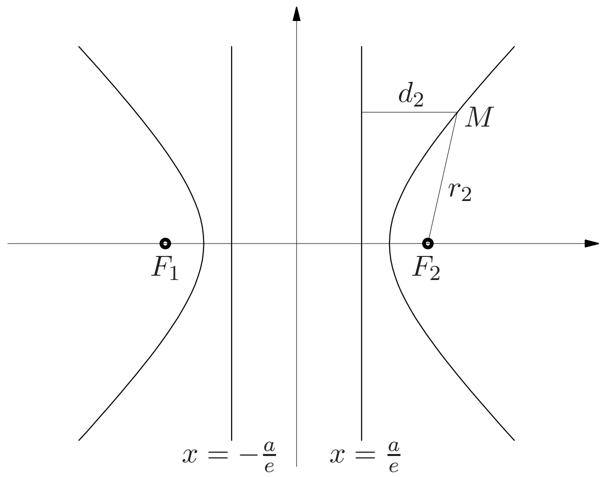
Apibrėžimas 4 *Elipsės (hiperbolės) direktrise, atitinkančia židinį $F_1(-c;0)$, vadinama tiesė, apibrėžiama lygtimi $x = -\frac{a}{e}$; direktrise, atitinkančia židinį $F_2(c;0)$, vadinama tiesė, apibrėžiama lygtimi $x = \frac{a}{e}$.*

Kadangi apskritimo $e = 0$, jis direktrisių neturi (*moralas* – matematikoje, kaip ir daugelyje kitų gyvenimo sričių, nevisada naudinga būti labai apskritam). Elipsės bei hiperbolės direktrisės pavaizduotos Pav. 1.7, 1.8.

Teiginys 1 *Bet kokiam elipsės (hiperbolės) taškui M atstumo iki židinio santykis su atstumu iki tą židinį atitinkančios direktrisės yra lygus ekscentricitetui e.*



1.7: Elipsė ir jos direktrisės



1.8: Hiperbolė ir jos direktrisės

Įrodymas. Kreivės taško $M(x;y)$ atstumą iki židinio F_1 žymime r_1. Preitame skyrelyje įrodėme, kad $r_1 = |ex + a|$. Taško M atstumą iki F_1 atitinkančios direktrisės $x = -\frac{a}{e}$ pažymėkime d_1. Kadangi $d_1 = |x + \frac{a}{e}|$, gauname

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{|ex+a|}{|x+\frac{a}{e}|} = \frac{|ex+a|}{\frac{1}{e}|ex+a|} = e.$$

Kitam židiniui F_2 panašiai gauname $\frac{r_2}{d_2} = e$.

Nesunkiai įrodomas ir atvirkštinis teiginys. Įrodymą praleidžiame, nors patį teiginį naudosime sprendžiant uždavinius.

Atvirkštinis teiginys 1 *Tarkime plokštumoje yra fiksuotas taškas F bei tiesė, neinanti per šį tašką. Taip pat yra fiksuotas teigiamas skaičius e. Bet kokiam plokštumos taškui M atstumą iki taško F pažymėkime r, o atstumą iki fiksuotos tiesės pažymėkime d. Plokštumos taškai, kuriems $\frac{r}{d} = e$ sudaro*

- *elipsę, jei $e < 1$;*
- *hiperbolę, jei $e > 1$.*

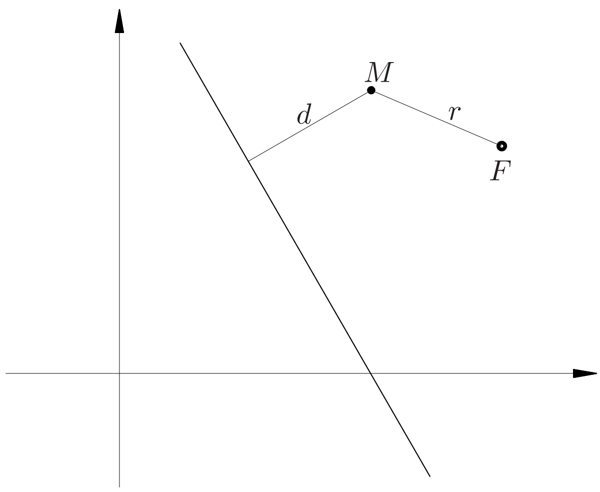
Be to, taškas F yra vienas iš kreivės židinių, fiksuota tiesė – tą židinį atitinkanti direktrisė, o teigiamas skaičius e – kreivės ekscentricitetas.

9. Parabolės apibrėžimas bei kanoninė lygtis

Plokštumoje fiksuojamas taškas F, kuris vadinamas židiniu. Taip pat fiksuojama tiesė, neinanti per židinį F. Ši tiesė vadinama direktrise.

Apibrėžimas 5 *Parabole vadinama aibė plokštumos taškų, vienodai nutolusių nuo židinio bei direktrisės.*

Bet kokiam plokštumos taškui M atstumą iki židinio F žymime r, o atstumą iki direktrisės žymime d (žr. Pav. 1.9). Parabolę sudaro taškai M, kuriems $r = d$. Parašę šią salygą pavidale $\frac{r}{d} = 1$ bei turėdami omenyje Teiginį 1, parabolės ekscentricitetu galime deklaruoti skaičių 1.



1.9: Parabolės apibrėžimas

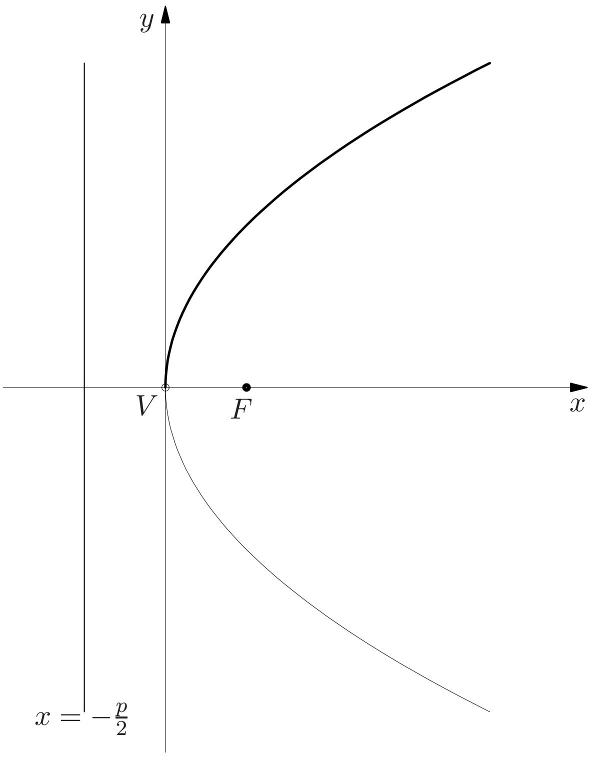
Parabolės kanoninė koordinačių sistema sudaroma gana paprastai – x-ašis yra tiesė, einanti per židinį F bei statmena direktrisei. x-ašies teigiama kryptis – nuo direktrisės link židinio. y-ašis yra statmena x-ašiai ir dalija atkarpą tarp židinio bei direktrisės pusiau (žr. Pav. 1.10).

Pažymėkime atstumą tarp židinio bei direktrisės raide p ($p > 0$). Gauname, kad kanoninėje koordinačių sistemoje $F(\frac{p}{2}; 0)$, o direktrisės lygtis yra $x = -\frac{p}{2}$. Todėl taškui $M(x; y)$ turime $r = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$, $d = |x + \frac{p}{2}|$. Pakėlę sąlygą $r = d$ kvadratu, po kelių aritmetinių veiksmų gauname parabolės kanoninę lygtį

$$y^2 = 2px.$$

Visi paminėti veiksmai yra nesudėtingi. Todėl, atliekant veiksmus atvirkščia tvarka, lengva patikrinti, kad taškas, kurio koordinatės tenkina lygtį (9.), priklauso parabolei.

Panašiai, kaip elipsės ar hiperbolės atveju, gauname, kad x-ašis yra parabolės simetrijos ašis. Todėl parabolės formą tiriame tik pirmame ketvirtyje, kur ji yra funkcijos $y = \sqrt{2px}$ grafikas. Tyrimo rezultatą matote Pav. 1.10. Tai gerai iš mokyklos laikų žinomas kvadratinio trinario grafikas, pasuktas 90 laipsnių. Taškas V, kuriame simetrijos ašis kerta parabolę, vadinamas parabolės *viršūne*.



1.10: Kanoninė parabolės koordinačių sistema

1.11: Kreivės liestinė

10. Kreivės liestinė

Kreivės liestine taške A vadiname kirstinių AM ribinę padėtį taškui M artėjant į A (žr. Pav. 1.11). Šis apibrėžimas pasufleruoja paprastą liestinių lygčių radimo būdą:

- randamas kirstinės AM krypties koeficientas m;
- ieškoma krypties koeficiento m riba m_{rib}, kai M artėja į A;
- liestinės taške $A(x_0; y_0)$ lygtis parašoma pavidale

$$y - y_0 = m_{rib}(x - x_0)$$

  ir, kiek įmanoma, suprastinama.

11. Elipsės ir hiperbolės liestinės

Elipsės ir hiperbolės lygtį parašome pavidale $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1$. Elipsės atveju: $p = a^2$, $q = b^2$; hiperbolės atveju: $p = a^2$, $q = -b^2$. Kreivės liestinės taške $A(x_0; y_0)$ lygtį ieškome naudodami ką tik pateiktą schemą. Gretimo taško M koordinates pažymime $(x_1; y_1)$.

- Kirstinės AM krypties koeficientas m yra lygus $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$. Taškai A ir M priklauso kreivei, todėl

$$\begin{aligned} \frac{x_0^2}{p} + \frac{y_0^2}{q} &= 1, \\ \frac{x_1^2}{p} + \frac{y_1^2}{q} &= 1 \;. \end{aligned} \tag{1.6}$$

  Atėmę iš antrosios lygties pirmąją gauname

$$m = -\frac{q}{p}\frac{x_1 + x_0}{y_1 + y_0} \;.$$

- Iš šios m išraiškos seka, kad

$$\lim_{M \to A} m = -\frac{q}{p}\frac{x_0}{y_0} \;.$$

- Lygtį

$$y - y_0 = -\frac{q}{p}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

  parašome pavidale

$$\frac{x_0 x}{p} + \frac{y_0 y}{q} = \frac{x_0^2}{p} + \frac{y_0^2}{q} \;.$$

  Pasinaudoję pirmąja (1.6) lygybe, gauname liestinės lygtį

$$\frac{x_0 x}{p} + \frac{y_0 y}{q} = 1 \;. \tag{1.7}$$

Elipsės liestinės lygtis yra

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \;; \tag{1.8}$$

hiperbolės liestinės lygtis yra

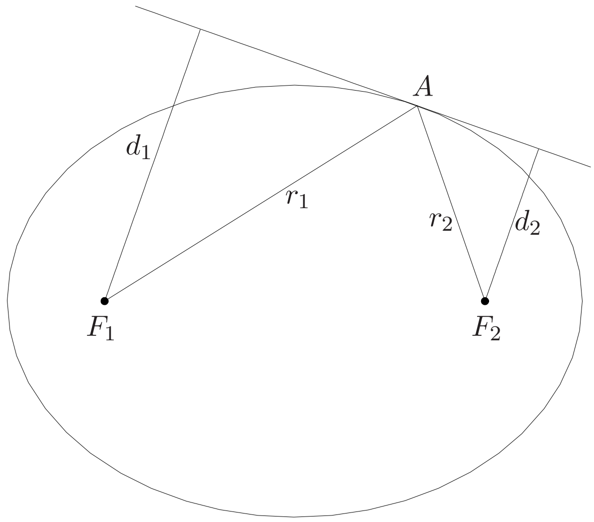
$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \;. \tag{1.9}$$

12. Parabolės liestinės

Parabolės liestinės taške $A(x_0; y_0)$ lygtį ieškome naudodami tą pačią schemą. Gretimo taško M koordinates pažymime $(x_1; y_1)$.

- Kirstinės AM krypties koeficientas m yra lygus $\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$. Taškai A ir M priklauso parabolei, todėl
$$\begin{aligned} y_0^2 &= 2px_0, \\ y_1^2 &= 2px_1. \end{aligned} \tag{1.10}$$
  Atėmę iš antrosios lygties pirmąją gauname
$$m = \frac{2p}{y_1 + y_0}.$$
- Iš šios m išraiškos seka, kad
$$\lim_{M \to A} m = \frac{p}{y_0}\ .$$
- Lygtį
$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$$
  parašome pavidale
$$y_0 y - y_0^2 = px - px_0\ .$$
  Pasinaudoję pirmąja (1.10) lygybe, gauname liestinės lygtį
$$y_0 y = p(x + x_0). \tag{1.11}$$

Atkreipkite dėmesį, kad nenaudojome sąlygos $p > 0$ – parabolė gali būti nukreipta ir "kairėn". Jei parabolės lygtis yra $x^2 = 2py$ – "mokyklinis" atvejis, kai parabolė nukreipta "aukštyn" arba "žemyn" – liestinės lygtis parabolės taške $A(x_0; y_0)$ yra $x_0 x = p(y + y_0)$ (įrodoma analogiškai).



1.12: Elipsės (liestinės) optinė savybė

13. Elipsės ir hiperbolės optinės savybės

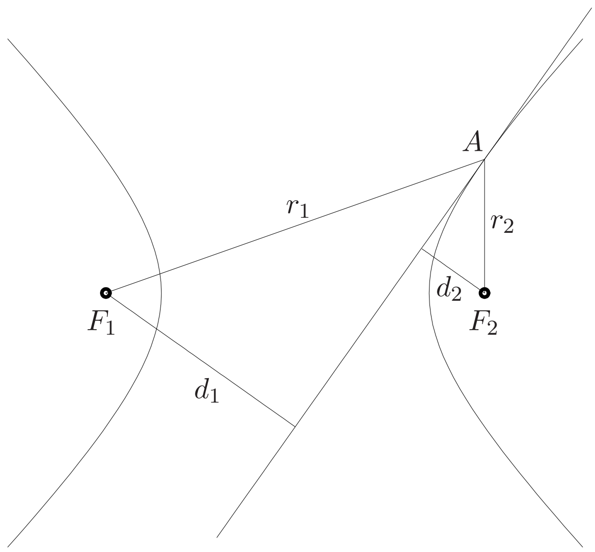
Teiginys 2 *Bet kokiam elipsės (hiperbolės) taškui A atkarpos F_1A ir F_2A sudaro lygius kampus su liestine taške A.*

Įrodymas. Įrodysime, kad šių kampų sinusai lygūs, t.y. $\frac{d_1}{r_1} = \frac{d_2}{r_2}$ (žr. Pav. 1.12, 1.13). Skaičiant atstumus nuo židinių $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ iki liestinės $\frac{x_0x}{a^2} \pm \frac{y_0y}{b^2} = 1$ taške $A(x_0;y_0)$, panaudoję $c = ea$, gauname

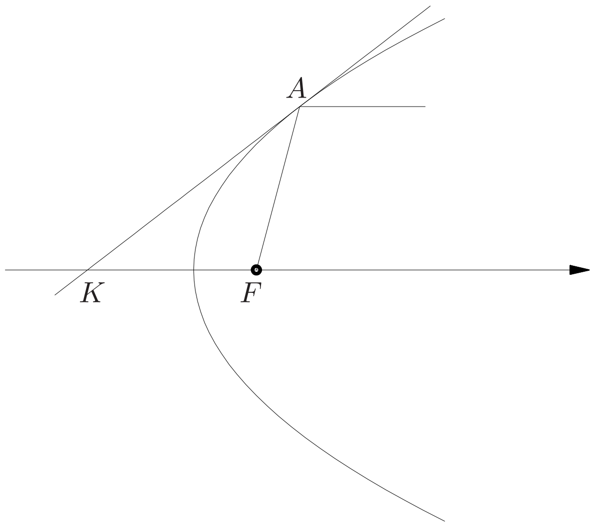
$$d_1 = \frac{|-\frac{x_0c}{a^2} - 1|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{|ex_0 + a|}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}},$$

$$d_2 = \frac{|\frac{x_0c}{a^2} - 1|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{|ex_0 - a|}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Kadangi $r_1 = |ex_0 + a|$, $r_2 = |ex_0 - a|$, lygybė $\frac{d_1}{r_1} = \frac{d_2}{r_2}$ nekelia abejonių.



1.13: Hiperbolės (liestinės) optinė savybė



1.14: Parabolės (liestinės) optinė savybė

14. Parabolės optinės savybės

Teiginys 3 *Bet kokiam parabolės taškui A atkarpa FA ir simetrijos ašis sudaro lygius kampus su liestine taške A.*

Įrodymas. Liestinės taške $A(x_0; y_0)$ sankirtą su simetrijos ašimi x pažymėkime K (žr. Pav. 1.14). Įrodysime, kad $|AF| = |KF|$.

Liestinės $y_0 y = p(x + x_0)$ ir x-ašies $y = 0$ sankirta yra taškas $K(-x_0; 0)$. Jo atstumas iki židinio $F(\frac{p}{2}; 0)$ yra $x_0 + \frac{p}{2}$. Kadangi $|AF|$ lygus atstumui nuo A iki direktrisės $x = -\frac{p}{2}$, gauname $|AF| = x_0 + \frac{p}{2}$. Todėl $|AF| = |KF|$.

15. Pratimai bei uždaviniai

Skyrių baigiame charakteringų šios dalies uždavinių rinkiniu.

1. Rasti elipsės kanoninę lygtį, jei atstumas tarp židinių 6, o atstumas tarp direktrisių $16\frac{2}{3}$.

2. Rasti hiperbolės kanoninę lygtį, jei asimptočių lygtys yra $y = \pm\frac{4}{3}x$, o atstumas tarp direktrisių $6\frac{2}{5}$.

3. Elipsės židiniai yra $(1;3)$ ir $(3,1)$, o ekscentricitetas lygus $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Rasti jos:

I) lygtį;

II) kanoninę lygtį.

4. Elipsės židinys yra $(3;0)$, o jį atitinkanti direktrisė $x + y - 1 = 0$. Rasti elipsės lygtį, jei jos ekscentricitetas lygus $\frac{1}{2}$.

5. Rasti elipsės $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$ židinius ir juos atitinkančias direktrises.

6. Rasti elipsės $9x^2 + 5y^2 - 18x - 30y + 9 = 0$ židinius ir juos atitinkančias direktrises.

7. Rasti parabolės $x = 2y^2 - 12y + 14$ židinį ir direktrisę.

8. Rasti hiperbolės lygtį, jei žinomos jos asimptotės $x - y + 1 =$, $2x + y - 1 = 0$ bei jos taškas $(3;1)$.

9. Rasti kreivės kanoninę lygtį, jei simetrijos ašys sutampa su koordinatinėmis ašimis ir ji eina per taškus $(1;-2)$, $(2;3)$.

10. Rasti elipsės $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ liestines, lygiagrečias tiesei $4x - 2y + 23 = 0$.

11. Rasti hiperbolės $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{18} = 1$ tašką artimiausią tiesei $3x + 2y + 1 = 0$.

12. Rasti parabolės $y^2 = 5x$ liestines, išvestas per tašką $(5;9)$.

13. Parabolė $y^2 = 2px$ liečia tiesę $x - 2y + 4 = 0$. Rasti jos lygtį.

14. Elipsės simetrijos ašys sutampa su koordinatinėmis ašimis. Elipsė eina per tašką $(4;-1)$ ir liečia tiesę $x + 4y - 10 = 0$. Rasti jos lygtį.

14. Kreivės simetrijos ašys sutampa su koordinatinėmis ašimis. Žinomos dvi jos liestinės $3x - 2y - 20 = 0$, $x + 6y - 20 = 0$. Rasti kreivės lygtį.

15. Elipsės židiniai yra $(-3;0)$, $(3;0)$. Žinoma jos liestinė $x - y - 5 = 0$. Rasti elipsės lygtį.

Skyrius 2

Antros eilės kreivės

Skyriuje pateikiama Kęstučio Karčiausko iš Vilniaus universtiteto Matematikos ir Informatikos fakulteto paskaitų konspekto medžiaga.

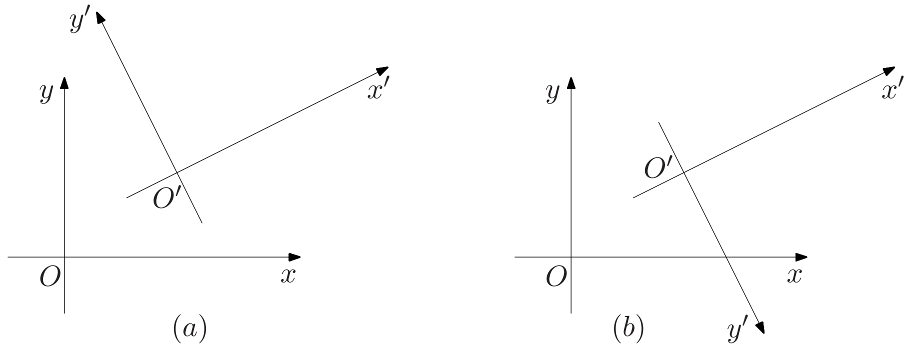
1. Koordinačių sistemos transformacija

Antrosios eilės kreivių lygtis prastinsime keisdami (transformuodami) koordinačių sistemą. Prisiminkime svarbiausius plokštumos stačiakampių koordinačių sistemų transformacijos momentus.

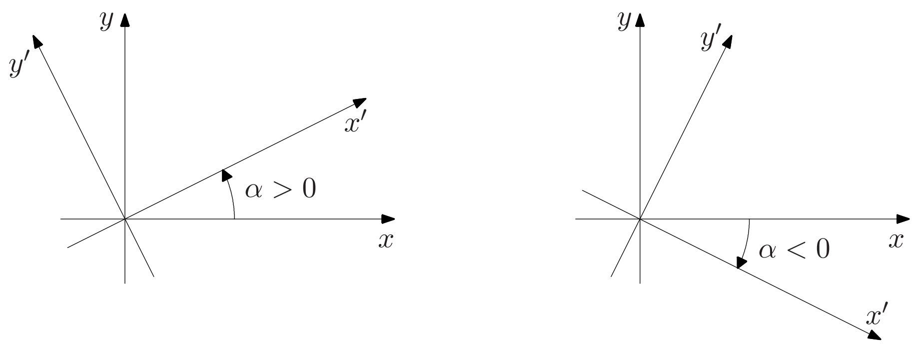
Apibrėžimas 6 *Koordinačių sistemos Oxy ir $O'x'y'$ yra vienos orentacijos, jei posūkis nuo x'-ašies link y'-ašies yra tos pačios krypties kaip ir posūkis nuo x-ašies link y-ašies (žr. Pav. 2.1 (a)). Priešingu atveju (žr. Pav. 2.1 (b)), koordinačių sistemos Oxy ir $O'x'y'$ yra priešingos orentacijos. .*

Taip pat svarbu nepamiršti, kad posūkio kampas yra orentuotas – jo absoliutinė reikšmė imama su ženklu $+$ arba $-$.

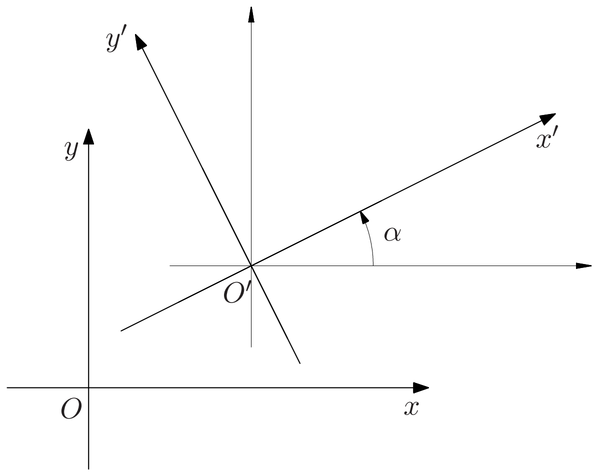
Apibrėžimas 7 *Jei pradinės koordinačių sistemos Oxy x-ašies posūkis link naujos koordinačių sistemos $O'x'y'$ x'-ašies yra tos pačios krypties, kaip ir posūkis nuo x-ašies link y-ašies, tai posūkio kampas α yra teigiamas; priešingu atveju posūkio kampas yra neigiamas. (Žr. Pav. 2.2).*



2.1: Vienodai (a) ir skirtingai (b) orentuotos koordinačių sistemos.



2.2: Orentuotas posūkio kampas.



2.3: Bendroji koordinačių sistemos transformacija.

Dėmesio: nustatant posūkio kampo ženklą, naujos koordinačių sistemos y'-ašies kryptis nevaidina jokio vaidmens.

Bendrąją koordinačių sistemos transformaciją (žr. Pav. 2.3) dažnai yra patogu suskaidyti į du etapus – koordinačių sistemos posūkį ir koordinačių sistemos lygiagretų postūmį (žr. Pav. 2.4).

Dabar prisiminkime (sužinokime) koordinačių transformacijos formules.

1.1. Bendrosios koordinačių transformacijos formulės

Tegul Oxy yra pradinė koordinačių sistema, o $O'x'y'$ – naujoji. Taško M koordinatės atžvilgiu pradinės sistemos yra $(x;y)$, atžvilgiu naujosios – $(x';y')$. Įvedami duomenys yra atžvilgiu pradinės koordinačių sistemos:

naujosios koordinačių sistemos pradžia $O'(x_0;y_0)$;

α – orentuotas kampas, kuriuo reikia pasukti x-ašį kad gautume x'-ašį.

- Koordinačių sistemos Oxy ir $O'x'y'$ yra vienos orentacijos

$$
\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + x_0 \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + y_0. \end{cases} \tag{2.1}
$$

- Koordinačių sistemos Oxy ir $O'x'y'$ yra priešingų orentacijų

$$
\begin{cases} x = x' \cos\alpha + y' \sin\alpha + x_0 \\ y = x' \sin\alpha - y' \cos\alpha + y_0. \end{cases} \tag{2.2}
$$

1.2. Koordinačių sistemos posūkis

Žiūrėk Pav. 2.4(a).

Koordinačių sistemos yra vienos orentacijos, o jų pradžios sutampa ($O = O'$). Kadangi šiuo atveju $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, formulės (2.1) supaprastėja iki

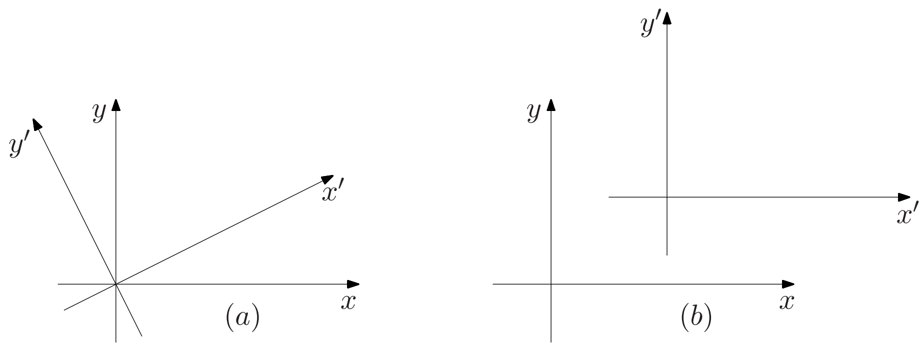
$$
\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{cases} \tag{2.3}
$$

1.3. Koordinačių sistemos lygiagretus postūmis

Žiūrėk Pav. 2.4(b).

Koordinačių sistemų ašys yra tų pačių krypčių (todėl sistemos yra vienos orentacijos). Kadangi šiuo atveju $\alpha = 0$, formulės (2.1) supaprastėja iki

$$
\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0. \end{cases} \tag{2.4}
$$



2.4: Koordinačių sistemos posūkis (a) ir lygiagretus postūmis (b).

1.4. Matricinė koordinačių transformacijos formulių išraiška

Pažymėkime

$$\begin{array}{ccc} c_{11}=\cos\alpha & c_{12}=\mp\sin\alpha & c_{13}=x_0 \\ c_{21}=\sin\alpha & c_{22}=\pm\cos\alpha & c_{23}=y_0 \\ c_{31}=0 & c_{32}=0 & c_{33}=1 \end{array}$$

viršutinis ženklas naudojamas, jei sistemos yra vienos orentacijos – formulė (2.1); apatinis ženklas naudojamas, jei sistemos priešingų orentacijų – formulė (2.2).

Pažymėkime

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad .$$

Įvedus šiuos žymenis formulės (2.1) ir (2.2) matricinėje formoje tampa vienodomis:

$$X=CX' \tag{2.5}$$

Matriciniai žymenys įgalina panaudoti tiesinės algebros rezultatus ten, kur tiesioginiai aritmetiniai skaičiavimai tampa komplikuotais. Matricinė koordinačių transformacijų forma (2.5) plačiai vartojama kompiuterinėje grafikoje.

2. Bendroji antros eilės kreivės lygtis

Tarkime yra fiksuota stačiakampė koordinačių sistema Oxy. Bendroji antros eilės kreivės lygtis $F(x,y)=0$ šios sistemos atžvilgiu yra

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0\ . \tag{2.6}$$

Remiantis bendrąja kreivės lygtimi sudaroma jos matrica A

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\ ,$$

apibrėžiant $a_{21}=a_{12}$, $a_{31}=a_{13}$, $a_{32}=a_{23}$. Matrica A yra simetrinė, t.y. $A^T=A$. Panaudojus skyriaus 1.4. žymenis gaunama matricinė antros eilės kreivės lygties forma

$$F(x,y)=X^TAX=0\ . \tag{2.7}$$

Ši lygybė įrodoma elementariais skaičiavimais dauginant matricas. Panašaus sudėtingumo (tiksliau lengvumo) aritmetiniais veiksmais įrodoma, kad

$$F(x,y)=xF_1(x,y)+yF_2(x,y)+F_3(x,y)\ , \tag{2.8}$$

kur

$$\begin{aligned} F_1(x,y)&=a_{11}x+a_{12}y+a_{13} \\ F_2(x,y)&=a_{21}x+a_{22}y+a_{23} \\ F_3(x,y)&=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}\ . \end{aligned} \tag{2.9}$$

Išraiška $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ paprastai vadinama kvadratine kreivės lygties dalimi, $2a_{13}x+2a_{23}y$ – tiesine dalimi, o a_{33} – laisvuoju nariu.

2.1. Ryšys tarp kreivės lygčių atžvilgiu skirtingų koordinačių sistemų

Tarkime turime antros eilės kreivės lygtį atžvilgiu koordinačių sistemos Oxy. Kreivės lygtį $F'(x', y') = X'^T A' X' = 0$ atžvilgiu naujos koordinačių sistemos $O'x'y'$ gauname iš (2.7), pasinaudoję koordinačių transformacijų formulėmis (2.5):

$$F'(x', y') = (CX')^T A(CX') = X'^T (C^T AC)X' = X'^T A' X'.$$

Kadangi matricos A' ir $C^T AC$ yra simetrinės $\Big((C^T AC)^T = C^T A^T C = C^T AC\Big)$, iš paskutinės lygybės seka

$$A' = C^T AC \tag{2.10}$$

- *Koordinačių sistemos posūkis.* Pritaikę formulę (2.10) koordinačių sistemos posūkiui gauname:

  1. jei tiesinė lygties dalis buvo lygi 0, tai ir po posūkio ji išlieka lygi 0;
  2. laisvasis narys nesikeičia, t.y. $a'_{33} = a_{33}$.

- *Lygiagretus postūmis.* Pritaikę formulę (2.10) lygiagrečiam koordinačių sistemos postūmiui gauname:

  1. kvadratinė lygties dalis nesikeičia, t.y. $a'_{11} = a_{11}$, $a'_{12} = a_{12}$, $a'_{22} = a_{22}$;
  2. tiesinės dalies kaita nusakoma formulėmis

  $$\begin{aligned} a'_{13} &= F_1(x_0, y_0) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} \\ a'_{23} &= F_2(x_0, y_0) = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

  3. $a'_{33} = F(x_0, y_0)$.

3. Antros eilės kreivės lygties invariantai

Efektyviai prastinant antros eilės kreivės lygtį labai svarbūs yra lygties *ortogonalūs invariantai*.

Apibrėžimas 8 *Antros eilės kreivės lygties ortogonaliuoju invariantu vadinama nuo lygties koeficientų priklausanti funkcija g, kurios reikšmė nesikeičia, stačiakampę koordinačių sistemą Oxy pakeitus kita stačiakampe koordinačių sistema $O'x'y'$, t.y.*

$$g(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}) = g(a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_{13}, a'_{23}, a'_{33}).$$

Teiginys 4 *Reiškiniai*

$$I_1 = a_{11} + a_{22} \quad , \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{2.12}$$

yra ortogonalūs antros eilės kreivės lygties invariantai.

Šis teiginys įrodomas tiesinės algebros kurse. Beje, reiškinio $I_3 = |A|$ invariantiškumas seka iš formulės (2.10):

$$|A'| = |C^T AC| = |A||C|^2 = |A|,$$

nes $|C| = \pm 1$.

4. Charakteringoji lygtis

Apibrėžimas 9 *Antros eilės kreivės charakteringąja lygtimi vadinama antrojo laipsnio lygtis*

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0\ . \tag{2.13}$$

Lengva patikrinti, kad charakteringąją lygtį galime užrašyti matricinėje formoje

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0\ . \tag{2.14}$$

Teiginys 5 *Charakteringoji lygtis visuomet turi realias šaknis.*

Įrodymas Skaičiuojame charakteringosios lygties diskriminantą D:

$$D = I_1^2 - 4I_2 = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0.$$

Taip pat gauname, kad charakteringoji lygtis turi kartotinę šaknį ($D = 0$), jei $a_{11} = a_{22}$ ir $a_{12} = 0$. Nesunkiai patikrinima (išskiriant lygtyje pilnus kvadratus atžvilgiu x ir y), kad šiuo atveju, jei kreivė turi realius taškus, lygtis apibrėžia apskritimą.

Charakteringosios lygties šaknis žymime $\lambda_1,\ \lambda_2$. Kadangi jos visuomet realios, tai

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ ,$$

o pagal Vijeto teoremą

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2\ , \quad I_2 = \lambda_1\lambda_2\ .$$

5. Antros eilės kreivės centras

Apibrėžimas 10 *Antros eilės kreivės centru vadinamas taškas, kurio koordinatės $(x; y)$ tenkina lygčių sistemą*

$$\begin{cases} F_1(x,y) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ F_2(x,y) = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0\ . \end{cases} \tag{2.15}$$

Apibrėžimas 11 *Antros eilės kreivė vadinama centrine, jei ji turi vienintelį centrą. Priešingu atveju – kreivė neturi centro arba turi jų be galo daug – antros eilės kreivė vadinama necentrine.*

Sistema (2.15) turi vienintelį sprendinį, jei $I_2 \neq 0$. Todėl, jei $I_2 \neq 0$ kreivė yra centrinė, jei $I_2 = 0$ – necentrinė.

Teiginys 6 *Jei koordinačių sistemos pradžia sutampa su kreivės centru, tai kreivės lygties tiesinė dalis yra lygi nuliui.*

Įrodymas Iš centro apibrėžimo bei formulės (2.11) seka, kad perkėlus koordinačių sistemos pradžią į kreivės centrą, jos tiesinė dalis virsta nuliumi. Bet kuri kita koordinačių sistema su tuo pačiu centru gaunama iš šios (lygiagrečiai pastumtos) sistemos pasukant apie naują koordinačių pradžią. Iš skyriaus 2.1. punkto ∘ 1 seka, kad tiesinė lygties dalis atžvilgiu pasuktos koordinačių sistemos lieka lygi nuliui.

Remdamiesi šiuo teiginiu darome išvadą: jei koordinačių sistemos pradžia sutampa su kreivės centru, tai

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0\ .$$

Tokioje koordinačių sistemoje $F(-x;-y) = F(x;y)$, todėl: *kreivės centras yra kreivės simetrijos centras.*

6. Kvadratinės lygties dalies prastinimas

Šiame skyriuje įrodysime, kad pasukus koordinačių sistemą galima panaikinti skirtingų kintamųjų sandaugą ($a'_{12} = 0$). Be to iš įrodymo išpešime papildomos naudingos informacijos.

Kadangi koordinačių transformacijai naudojame posūkį, tai

$$C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Pasinaudoję formule (2.10) gauname

$$a'_{21} = -\sin\alpha\big(\underbrace{a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha}_{n_1}\big) + \cos\alpha\big(\underbrace{a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha}_{n_2}\big)\ .$$

Sąlyga, kad pranyksta skirtingų kintamųjų sandauga, t.y. $a'_{12} = a'_{21} = 0$, yra

$$-n_1\sin\alpha + n_2\cos\alpha = 0\ .$$

Ši sąlyga reiškia, kad vektorius $(n_1;n_2)$ yra statmenas vektoriui $(-\sin\alpha;\cos\alpha)$. Tai ekvivalentu salygai, kad vektorius $(n_1;n_2)$ yra lygiagretus vektoriui $(\cos\alpha;\sin\alpha)$, t.y. $\exists$ toks skaičius λ, kad

$$\begin{cases} a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha &= \lambda\cos\alpha \\ a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha &= \lambda\sin\alpha\ . \end{cases}$$

Šią sąlygą perrašome pavidale

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha &= 0 \\ a_{21}\cos\alpha + (a_{22} - \lambda)\sin\alpha &= 0\,. \end{cases} \tag{2.16}$$

Sistema (2.16) turi *nenulinį* spendinį $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, jei

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0\,.$$

Taigi λ yra charakteringosios lygties šaknis. Pažymėję šią šaknį λ_1 iš sąlygos (2.16) pirmosios lygybės gauname

$$\tan\alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}\,. \tag{2.17}$$

Primename vakarykščiams mokiniams, kad žinodami tangentą nesunkiai apskaičiuojame to paties kampo sinusą ir kosinusą:

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}}\,. \tag{2.18}$$

Pasinaudoję formule (2.10) taip pat gauname

$$a'_{11} = \cos\alpha\big(\underbrace{a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha}_{n_1}\big) + \sin\alpha\big(\underbrace{a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha}_{n_2}\big)\,.$$

Kadangi $n_1 = \lambda_1\cos\alpha,\ n_2 = \lambda_1\sin\alpha$, tai $a'_{11} = \lambda_1(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \lambda_1$. Todėl charakteringoji lygtis, parašyta matriciniame pavidale atžvilgiu naujos koordinačių sistemos, yra

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 \\ 0 & a'_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - a'_{22}) = 0\,.$$

Iš šios lygybės gauname, kad a'_{22} yra kita charakteringosios lygties šaknis, t.y. $a'_{22} = \lambda_2$.

Tai ir viskas, ką reikėjo parodyti šiame skyriuje. Surinkime viščiukus į vieną vietą.

Išvada 1 *Tegul* λ_1 *ir* λ_2 *yra charakteringosios lygties šaknys. Pasukus koordinačių sistemą kampu* α*, kurio*

$$\tan\alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} ,$$

kvadratinė lygties dalis atžvilgiu naujos koordinačių sistemos supaprastėja iki $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$*, t.y.* $a'_{11} = \lambda_1$*,* $a'_{12} = 0$*,* $a'_{22} = \lambda_2$*. Posūkio kampo sinusas ir kosinusas apskaičiuojami naudojantis formulėmis (2.18).*

7. Centrinių kreivių kanoninės lygtys

7.1. Bendroji dalis

Kadangi kreivė centrinė, tai $I_2 \neq 0$. Todėl abi charakteringosios lygties šaknys λ_1, λ_2 nelygios 0, nes $I_2 = \lambda_1\lambda_2$.

Pradžioje lygiagrečiu postūmiu perkeliame koordinačių sistemos pradžią į kreivės centrą $(x_0; y_0)$. Kreivės lygties tiesinė dalis virsta 0. Po to, remiantis Išvada 1, supaprastiname lygties kvadratinę dalį. Po šių operacijų kreivės lygtis atžvilgiu naujos koordinačių sistemos $O'x'y'$ supaprastėja iki

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + a'_{33} = 0 .$$

Kadangi

$$I_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 a'_{33} = I_2 a'_{33} ,$$

gauname kad $a'_{33} = I_3/I_2$. Tai reiškia, kad centrinės kreivės lygtį visuomet galime parašyti pavidale

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0 . \qquad (2.19)$$

Šis lygties pavidalas labai svarbus – ir užmiršę tolimesnes lygties pavidalo keitimo detales, spręsdami konkretų uždavinį gausite teisingą atsakymą, jei naudositės lygtimi (2.19) bei žinosite kreivės tipą (ir neprivelsite aritmetinių klaidų).

7.2. Įvairūs atvejai

$I_2 > 0$

Šiuo atveju charakteringosios lygties šaknys yra vieno ženklo. Šaknimi λ_1 pasirenkame tą, kuri absoliutiniu dydžiu yra mažesnė. Kadangi $I_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, šaknų ženklas sutampa su I_1 ženklu.

(I) $I_3 \neq 0$; I_3 ir I_1 skirtingų ženklų.
Laivąjį narį I_3/I_2 perkeliame į dešinę pusę ir dalijame gautąją lygtį iš $(-I_3/I_2)$. Gauname

$$\frac{x'^2}{-\frac{I_3}{\lambda_1 I_2}} + \frac{y'^2}{-\frac{I_3}{\lambda_2 I_2}} = 1 \ .$$

Pažymėję

$$-\frac{I_3}{\lambda_1 I_2} = a^2 \ , \quad -\frac{I_3}{\lambda_2 I_2} = b^2 \ ,$$

turime elipsės kanoninę lygtį

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \ ,$$

nes $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \Rightarrow a^2 \geq b^2$.

(II) $I_3 \neq 0$; I_3 ir I_1 vienodų ženklų.
Po analogiškų aritmetinių manipuliacijų pažymime

$$-\frac{I_3}{\lambda_1 I_2} = -a^2 \ , \quad -\frac{I_3}{\lambda_2 I_2} = -b^2$$

ir gauname lygtį

$$-\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \ .$$

Šiuo atveju kreivė neturi realių taškų ir vadinama *menama elipse*.

(III) $I_3 = 0$.
Šiuo atveju lygtis (2.19) supaprastėja iki

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 0 \ .$$

Pažymėję $\lambda_1 = a^2$, $\lambda_1 = b^2$, jei $I_1 > 0$ ir $\lambda_1 = -a^2$, $\lambda_1 = -b^2$, jei $I_1 < 0$ gauname lygtį

$$a^2 x'^2 + b^2 y'^2 = 0 \ .$$

Ši kreivė teturi vieną realų tašką – kreivės centrą – ir yra vadinama *pora menamų susikertančių tiesių* arba *išsigimusia elipse*.

$I_2 < 0$

Šiuo atveju charakteringosios lygties šaknys yra skirtingų ženklų. Šaknimi λ_1 pasirenkame tą, kurios ženklas sutampa su I_3 ženklu (ir bet kurią, jei $I_3 = 0$).

(I) $I_3 \neq 0$
Laivąjį narį I_3/I_2 perkeliame į dešinę pusę ir dalijame gautąją lygtį iš $(-I_3/I_2)$. Gauname

$$\frac{x'^2}{-\frac{I_3}{\lambda_1 I_2}} + \frac{y'^2}{-\frac{I_3}{\lambda_2 I_2}} = 1 \ .$$

Pažymėję

$$-\frac{I_3}{\lambda_1 I_2} = a^2 \ , \quad -\frac{I_3}{\lambda_2 I_2} = -b^2 \ ,$$

turime hiperbolės kanoninę lygtį

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \ .$$

(II) $I_3 = 0$
Šiuo atveju lygtis (2.19) supaprastėja iki

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 0 \ .$$

Pažymėję $\lambda_1 = a^2$, $\lambda_1 = -b^2$, jei $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ (atvirkščiai priešingu atveju) gauname lygtį

$$a^2 x'^2 - b^2 y'^2 = 0 \ .$$

Kadangi $a^2x'^2 - b^2y'^2 = (ax' - by')(ax' + by')$, ši kreivė sudaryta iš dviejų susikertančių tiesių, todėl taip ir vadinama – *pora susikertančių tiesių*. Šios tiesės kertasi kreivės centre.

7.3. Elipsės ir hiperbolės kanoninės koordinačių sistemos radimas

Algoritmas kanoninei koordinačių sistemai rasti yra vienareikšmis (svarbu tik teisingai sunumeruoti charakteringosios lygties šaknis).

(I) Spręsdami sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \, , \end{cases}$$

randame kreivės centrą. Jis yra kanoninės koordinačių sistemos pradžia.

(II) Naudodamiesi formulėmis (2.17) ir (2.18) randame posūkio kampo sinusą ir kosinusą.

(III) Parašome koordinačių transformacijos formules.

8. Necentrinių kreivių kanoninės lygtys

8.1. Bendroji dalis

Kadangi kreivė necentrinė, tai $I_2 = 0$. Todėl viena charakteringosios lygties šaknys yra lygi 0, nes $I_2 = \lambda_1\lambda_2$. Abi charakteringosios lygties šaknys negali būti lygios 0, nes remiantis Išvada 1 gautume, kad kreivės lygtis yra pirmojo laipsnio (prieštara). Pažymime $\lambda_1 = 0$. Todėl $\lambda_2 \neq 0$ ir $I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = I_1$.

Pradžioje, remiantis Išvada 1, supaprastiname kvadratinę lygties dalį. Po šios operacijos kreivės lygtis atžvilgiu naujos koordinačių sistemos $O'x'y'$ supaprastėja iki

$$I_1 y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0 \, . \tag{2.20}$$

Toliau lygtį prastiname išskirdami pilną kvadratą:

$$I_1 y'^2 + 2a'_{23}y' = I_1\big(y'^2 + 2\frac{a'_{23}}{I_1}y' + \frac{a'^2_{23}}{I_1^2}\big) - \frac{a'^2_{23}}{I_1} \, .$$

Lygtį (2.20) parašome pavidale

$$I_1\big(y' + \frac{a'_{23}}{I_1}\big)^2 + 2a'_{13}x' + a'_{33} - \frac{a'^2_{23}}{I_1} = 0 \, .$$

Pakeitę kintamuosius $x' = x''$, $y' + \frac{a'_{23}}{I_1} = y''$ (t.y. lygiagrečiai pastūmę koordinačių sistemą) kreivės lygtį supaprastiname iki

$$I_1 y''^2 + 2a''_{13}x'' + a''_{33} = 0 \ .$$

Kadangi

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a''_{13} \\ 0 & I_1 & 0 \\ a''_{13} & 0 & a''_{33} \end{vmatrix} = -I_1 a''^2_{13} \ ,$$

gauname

$$|a''_{13}| = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} \ .$$

Išvada:

kreivės lygtis atžvilgiu tinkamai parinktos koordinačių sistemos $O'x'y'$ supaprastėja iki

$$I_1 y'^2 + 2a'_{13}x' + a'_{33} = 0 \ , \quad |a'_{13}| = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} \ . \tag{2.21}$$

8.2. Įvairūs atvejai

$I_3 \neq 0$

Šiuo atveju $a'_{13} \neq 0$, todėl lygtį (2.21) galime parašyti pavidale

$$I_1 y'^2 + 2a'_{13}\big(x' + \frac{a'_{33}}{a'_{13}}\big) = 0 \ .$$

Atlikus keitimą (lygiagretų postūmį) $x' + \frac{a'_{33}}{a'_{13}} = x''$, $y' = y''$ ir atsisakius bereikalingų štrichų, kreivės lygtis supaprastėja iki

$$I_1 y'^2 + 2a'_{13}x' = 0 \ ; \quad |a'_{13}| = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}} \ . \tag{2.22}$$

Jei a'_{13} ir I_1 yra priešingų ženklų, viskas paruošta tolimesniems veiksmams. Jei ne, tai pakeitę ašių kryptis, pakeičiame a'_{13} ženklą.

Baigiamieji veiksmai:

(i) perkeliame $2a'_{13}x'$ į kitą lygties pusę ir dalijame lygtį iš I_1;

(ii) kadangi a'_{13} ir I_1 yra priešingų ženklų, pasinaudoję sąlyga (2.22), kreivės lygtį parašome pavidale

$$y'^2 = 2px' \ , \quad p = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1^3}} \ . \tag{2.23}$$

Šiuo atveju gauname parabolės kanoninę lygtį.

$I_3 = 0$

Šiuo atveju $a'_{13} = 0$. Lygtį (2.21), padaliję ją iš I_1, parašome pavidale

$$y'^2 = \frac{-a'_{33}}{I_1} \ .$$

(I) a'_{33} ir I_1 priešingų ženklų.
Pažymėję $\frac{-a'_{33}}{I_1} = a^2$, gauname

$$y'^2 = a^2 \ .$$

Kadangi $y'^2 - a^2 = (y' - a)(y' + a)$, kreivė yra sudaryta iš dviejų lygiagrečių tiesių, todėl taip ir vadinama – *pora lygiagrečių tiesių*.

(II) a'_{33} ir I_1 vienodų ženklų.
Pažymėję $\frac{-a'_{33}}{I_1} = -a^2$, gauname

$$y'^2 = -a^2 \ .$$

Šiuo atveju kreivė neturi realių taškų ir vadinama *pora menamų lygiagrečių tiesių*.

(III) $a'_{33} = 0$.
Šiuo atveju turime lygtį

$$y'^2 = 0 \ .$$

Kreivė yra sudaryta iš vienos tiesės, bet vadinama kiek kitaip – *dviguba tiesė*.

Pastaba 1 *Tiek centrinės, tiek necentrinės kreivės atveju jos kanonine koordinačių sistema vadiname tą koordinačių sistemą, kurioje kreivės lygtis turi paprasčiausią – kanoninį – pavidalą. Bet praktiškai svarbu mokėti rasti tik senų pažistamų – elipsės, hiperbolės, parabolės – kanonines koordinačių sistemas.*

8.3. Necentrinės kreivės tipo nustatymas

Jei $I_2 = 0$ ir $I_3 \neq 0$, tai kreivė yra parabolė. Jei $I_2 = 0$ ir $I_3 = 0$, tai kreivės tipas priklauso nuo a'_{33} ženklo. Parodysime, kaip šiuo atveju efektyviai randamas a'_{33}.

Atžvilgiu kintamųjų x', y' sistema kreivės centrui rasti yra

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ I_1 y' = 0 \ , \end{cases}$$

Gauname, kad kreivė turi be galo daug centrų.

Algoritmas

(I) Spręsdami sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \ , \end{cases}$$

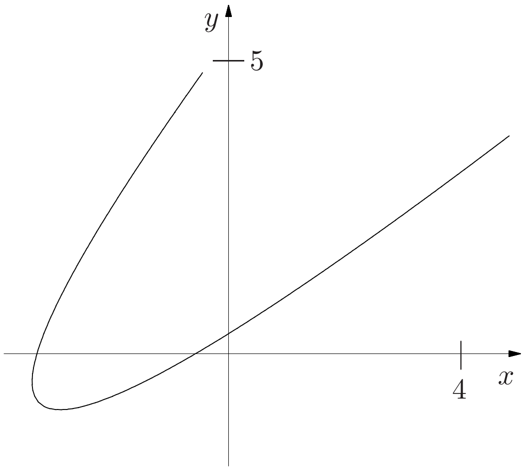
pasirenkame vieną iš daugelio kreivės centrų. Atliekame lygiagretų koordinačių sistemos postūmį, perkeldami koordinačių pradžią į pasirinktą kreivės centrą $(x_0; y_0)$. Naujas laisvasis narys yra $F(x_0, y_0)$, o lygties tiesinė dalis lygi 0.

(II) Remiantis Išvada 1 supaprastiname lygties kvadratinę dalį. Kreivės lygtis įgyja pavidalą

$$I_1 y'^2 + F(x_0, y_0) = 0 \ .$$

9. Vienas pavyzdys

Žinant visus antros eilės kreivių tipus, kyla pagunda spręsti su jomis susijusius uždavinius naudojant tokią schemą:



2.5: "Beveik" hiperbolė, "beveik" parabolė.

kreivės lygtis suvedama į kanoninį pavidalą;
uždavinys išsprendžiamas kanoninėje koordinačių sistemoje;
reikalingi duomenys pervedami į pradinę koordinačių sistemą.

Tokia sprendimo metodika neretai veikia puikiai. Bet dažnai ji yra neefektyvi, nes susiduriama su rimtomis problemomis. Pažvelkime kiek atidžiau štai į tokį pavyzdį.

Kreivė apibrėžiama lygtimi $x^2 - 2.0000000002xy + y^2 + 4x - 6y + 2 = 0$. Skaičiuojant jos invariantus gaunama

$$I_1 = 2 \,, \quad I_2 = -0.0000000002 \,, \quad I_3 = -0.9999999992 \,.$$

Kompiuteris, jei programos tikslumas skaičiuojant slankiu kableliu yra 10 skaičių už kablelio, sumišęs abejoja: kreivė centrinė ar ne? Mes, geometrijos teorijos asai, pašnibždėję jam, kad duotoji kreivė yra centrinė (akivaizdu, $I_2 \neq 0$), nedaug tepadėsime. Mat kompiuteriui, suvedant CENTRINĖS kreivės lygtį į kanoninį pavidalą, teks skaičiuoti $\frac{I_3}{I_2}$. Jei operuojant tokios eilės skaičiais ir neiššoks pranešimas apie dalybą iš nulio, gauto rezultato tikslumas bus visiškai nepatikimas.

Daugelį svarbių uždavinių (pavyzdžiui kreivės liestinių radimas) galima efektyviai spręsti pradinėje koordinačių sistemoje. Sekančiuose skyriuose tai panagrinėsime.

10. Antros eilės kreivės ir tiesės sankirta

Tiesės lygtį užrašome parametriniame pavidale: jei žinomas tiesės taškas $A(x_0; y_0)$ ir jos krypties vektorius $L(l; m)$, tai bet kurio tiesės taško $M(x; y)$ koordinates galime parašyti pavidale

$$\begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \ . \end{cases} \tag{2.24}$$

Įstatę šias išraiškas į bendrąją kreivės lygtį (2.6) ir sugrupavę gautojo reiškinio narius atžvilgiu t, gauname lygtį

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0 \ , \tag{2.25}$$

kur

$$P = a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 \ , \ Q = F_1(x_0, y_0)l + F_2(x_0, y_0)m \ , \ R = F(x_0, y_0) \ . \tag{2.26}$$

Įstatę lygties (2.25) šaknis t_1, t_2 į (2.24) gauname bendrųjų tiesės ir antros eilės kreivės taškų koordinates.

Bendru atveju, jei $P \neq 0$, gauname, kad *kvadratinė* lygtis (2.25):

- turi dvi skirtingas šaknis – tiesė kerta kreivę dviejuose taškuose;
- turi vieną šaknį – tiesė kerta kreivę *kartotiniame* taške;
- neturi šaknų – tiesė kreivės nekerta.

Bet galimi ir kiti atvejai, kai lygtis (2.25) išsigimsta į tiesinę ar net nulinio laipsnio lygtį.

10.1. Asimptotinės kryptys

Apibrėžimas 12 *Vektoriaus* $L(l; m)$ *kryptis vadinama* asimptotine*, jei*

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0\ . \tag{2.27}$$

Asimptotinės krypties atveju lygtis (2.25):

- ○ turi vieną šaknį – tiesė kerta kreivę *viename* taške;
- ○ neturi šaknų – tiesė kreivės nekerta;
- ○ turi be galo daug šaknų (virsta tapatybe $0 = 0$) – tiesė priklauso kreivei.

Nagrinėdami realių antros eilės kreivių kanonines lygtis nesunkiai atrenkame atvejus, kada kreivė turi asimptotines kryptis. Atsargiai, nepadarykite klaidos spręsdami uždavinius – žemiau išvardintose asimptotinės krypties sąlygose naudojama *kanoninė* koordinačių sistema, o ne pradinė.

- *hiperbolė* – dvi asimptotinės kryptys: $l^2/a^2 - m^2/b^2 = 0$; jos sutampa su hiperbolės asimptočių kryptimis;
- *parabolė* – viena asimptotinė kryptis: $m^2 = 0$; ji sutampa su parabolės simetrijos ašies kryptimi;
- *pora susikertančių tiesių* – dvi asimptotinės kryptys: $a^2l^2 - b^2m^2 = 0$; jos sutampa su susikertančių tiesių kryptimis;
- *pora lygiagrečių tiesių* – viena asimptotinė kryptis: $m^2 = 0$; ji sutampa su lygiagrečių tiesių kryptimi;
- *dviguba tiesė* – viena asimptotinė kryptis: $m^2 = 0$; ji sutampa su dvigubos tiesės kryptimi.

Naudojantis šiais kukliais pastebėjimais gauname gana efektyvius būdus: hiperbolės asimptotėms rasti; tiesėms, sudarančioms antros eilės kreivę, rasti.

Hiperbolės asimptočių radimas

1) Kadangi hiperbolės asimptotės eina per kreivės centrą, spręsdami sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

randame kreivės centrą $(x_0; y_0)$.
2) Kadangi hiperbolės asimptotės yra asimptotinės krypties, spręsdami lygtį

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$$

randame dvi asimptotines kryptis $(l_1; m_1)$ ir $(l_2; m_2)$.
3) Asimptočių lygtis parašome naudodami tiesės kanoninę lygtį:

$$\frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{m_1}\,, \qquad \frac{x - x_0}{l_2} = \frac{y - y_0}{m_2}\,.$$

Pavyzdys Rasti hiperbolės $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 34y + 2 = 0$ asimptotes.

Sprendimas 1) Spręsdami lygčių sistemą

$$\begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ -3x - 7y + 17 = 0 \end{cases}$$

randame kreivės centrą $(1; 2)$.

2) Spręsdami lygtį

$$l^2 - 6lm - 7m^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{l}{m}\right)^2 - 6\left(\frac{l}{m}\right) - 7 = 0$$

gauname $(\frac{l}{m})_1 = 7$, $(\frac{l}{m})_2 = -1$. Pasirenkame $l_1 = 7$, $m_1 = 1$, $l_2 = -1$, $m_2 = 1$.

3) Asimptočių lygtys yra

$$\frac{x - 1}{7} = \frac{y - 2}{1}\,, \qquad \frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 2}{1}\,.$$

Susikertančių tiesių radimas

Sprendimo eiga identiška hiperbolės asimptočių radimui, nes tiesės kertasi kreivės centre ir yra asimptotinių krypčių.

Pavyzdys Rasti kreivę $x^2 + 4xy + 3y^2 - 6x - 12y + 9 = 0$ sudarančias tieses.

Sprendimas Kadangi $I_2 < 0$, $I_3 = 0$, kreivė sudaryta iš dviejų susikertančių tiesių.

1) Spręsdami lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases}$$

randame kreivės centrą $(3; 0)$.

2) Spręsdami lygtį

$$l^2 + 4lm + 3m^2 = 0 \;\Rightarrow \left(\frac{l}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{l}{m}\right) + 3 = 0$$

gauname $(\frac{l}{m})_1 = -3$, $(\frac{l}{m})_2 = -1$. Pasirenkame $l_1 = -3$, $m_1 = 1$, $l_2 = -1$, $m_2 = 1$.

3) Tiesių lygtys yra

$$\frac{x-3}{-3} = \frac{y}{1}\,, \quad \frac{x-3}{-1} = \frac{y}{1}\,.$$

Lygiagrečių tiesių radimas

1) Kadangi tiesės yra asimptotinės krypties, spręsdami lygtį

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$$

randame asimptotinę kryptį $(l; m)$.

2) Pasirinkę neasimptotinės krypties tiesę, randame jos ir kreivės sankirtos taškus $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$. Kadangi kreivė sudaryta iš dviejų lygiagrečių tiesių, rastieji sankirtos taškai priklauso skirtingoms tiesėms.

3) Tiesių lygtis parašome naudodami tiesės kanoninę lygtį:

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m}\,, \quad \frac{x-x_2}{l} = \frac{y-y_2}{m}\,.$$

Pavyzdys Rasti kreivę $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y + 5 = 0$ sudarančias tieses.

Sprendimas Kadangi $I_2 = 0$, $I_3 = 0$, kreivė sudaryta iš dviejų lygiagrečių tiesių (galbūt menamų ar sutampančių).

1) Spręsdami lygtį

$$l^2 + 4lm + 4m^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{l}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{l}{m}\right) + 4 = 0$$

gauname $\frac{l}{m} = -2$. Pasirenkame $l = -2$, $m = 1$.

2) Randame kreivės ir tiesės $y = 0$ sankirtos taškus $(5; 0)$, $(1; 0)$.

3) Tiesių lygtys yra

$$\frac{x-5}{-2} = \frac{y}{1}\,, \qquad \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1}\,.$$

Dvigubos tiesės radimas

Tai specialus ką tik išnagrinėtos lygiagrečių tiesių konfigūracijos atvejis. Ieškant neasimptotinės krypties tiesės ir kreivės sankirtos gauname tik vieną tašką. Kiti sprendimo momentai tokie patys.

Pavyzdys Rasti kreivę $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$ sudarančias tieses.

Sprendimas 1) Spręsdami lygtį

$$l^2 - 6lm + 9m^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{l}{m}\right)^2 - 6\left(\frac{l}{m}\right) + 9 = 0$$

gauname $\frac{l}{m} = 3$. Pasirenkame $l = 3$, $m = 1$.

2) Randame kreivės ir tiesės $y = 0$ sankirtos tašką $(-2; 0)$.

3) Tiesės lygtis yra

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y}{1}\,.$$

11. Antros eilės kreivių liestinės

Jei antros eilės kreivė nėra sudaryta iš tiesių – elipsė, hiperbolė, parabolė, liestinę jos taške A esame apibrėžę kaip kirstinių $\overline{AM}$, kai $M \to A$, ribinę padėtį. Šiuo atveju A yra *kartotinis* antros eilės kreivės ir liestinės sankirtos taškas. Jei antros eilės kreivė yra sudaryta iš tiesių, visiškai natūraliai šios tiesės traktuojamos kaip kreivės liestinės. Šie prisiminimai motyvuoja tokį apibrėžimą.

Apibrėžimas 13 *Neasimptotinės krypties tiesė vadinama antros eilės kreivės liestine taške A, jei A yra kartotinis tiesės ir kreivės sankirtos taškas. Asimptotinės krypties tiesė vadinama antros eilės kreivės liestine, jei ji priklauso kreivei.*

Teiginys 7 *Antros eilės kreivės liestinės taške $A(x_0; y_0)$ lygtis yra*

$$F_1(x_0, y_0)x + F_2(x_0, y_0)y + F_3(x_0, y_0) = 0 \ . \tag{2.28}$$

Įrodymas Tarkime liestinės krypties vektorius yra $(l; m)$. Lygtis (2.25) įgyja pavidalą

$$Pt^2 + 2Qt = 0 \ ,$$

nes A priklauso kreivei, t.y. $R = F(x_0, y_0) = 0$. Ši lygtis tikrai turi šaknį $t = 0$. Jei $(l; m)$ yra neasimptotinės krypties, tai ši šaknis yra kartotinė. Todėl $Q = 0$. Jei $(l; m)$ yra asimptotinės krypties, tai $P = 0$. Šiuo atveju tiesė priklauso kreivei jei $Q = 0$. Vadinasi, bet kuriuo atveju būtina ir pakankama lietimosi sąlyga yra

$$Q = F_1(x_0, y_0)l + F_2(x_0, y_0)m = 0 \ .$$

Kadangi $(l; m)$ yra liestinės krypties vektorius, iš šios sąlygos seka, kad vektorius $(F_1(x_0, y_0); F_2(x_0, y_0))$ statmenas liestinei. Todėl jos lygtį galime parašyti pavidale

$$F_1(x_0, y_0)(x - x_0) + F_2(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \ .$$

Šią lygtį šiek tiek pertvarkome

$$F_1(x_0, y_0)x + F_2(x_0, y_0)y - (F_1(x_0, y_0)x_0 + F_2(x_0, y_0)y_0) = 0 \ .$$

Kadangi $F(x_0, y_0) = 0$, pasinaudoję lygybe (2.8), įrodymą baigiame.

Po tokio šaunaus įrodymo visgi lieka vienas klaustukas. Jei

$$F_1(x_0, y_0) = F_2(x_0, y_0) = 0 \ ,$$

tai lygtis (2.28) neapibrėžia tiesės. Vėl pasinaudoję lygybe (2.8) gauname, kad taip atsitinka, jei

$$\begin{cases} F_1(x_0, y_0) = 0 \\ F_2(x_0, y_0) = 0 \\ F_3(x_0, y_0) = 0\ . \end{cases} \tag{2.29}$$

Taškas $A(x_0; y_0)$, kurio koordinatės tenkina sąlygas (2.29), vadinamas *ypatinguoju* kreivės tašku. Parašę šias sąlygas kanoninėje koordinačių sistemoje gauname, kad reali antros eilės kreivė turi ypatingą tašką, jei ji yra:

- *pora susikertančių tiesių* – ypatingas taškas sutampa su kreivės centru;
- *dviguba tiesė* – visi kreivės taškai ypatingi (oi, oi).

11.1. Medžiaga pamąstymui

Atidesnis studentas gal jau pajuto, kad laiku "nusiplauname" nuo tolimesnio ypatingų taškų nagrinėjimo – kuo toliau į mišką, tuo daugiau medžių. Klausimas atkakliesiems – kas jūsų nuomone yra liestinės ypatingame taške (priklausomai nuo kreivės tipo) ir kaip jas rasti?

Ką tik pateikta medžiaga nėra sausas bendras požiūris į antros eilės kreivių geometrines savybes. Ji iš tikro padeda glaustai suformuluoti, kas buvo nagrinėta atskirai elipsei, hiperbolei, parabolei. O tai įgalina efektyviau spręsti ne vieną uždavinį. Bet lazda turi du galus – apibendrinę kai kuriuos paprastus dalykus, turime būti matematiškai tikslūs iki galo. Nepamirškite šito algoritmiškai spręsdami įvairius uždavinius (rašydami programas) ir kitose srityse – tarp gyvų būtybių kompiuteris yra pats didžiausias formalistas.

11.2. Uždavinio sprendimo pavyzdys

Uždaviniai su antros eilės kreivės liestinėmis bendroje koordinačių sistemoje sprendžiami faktiškai taip pat, kaip ir analogiški uždaviniai buvo sprendžiami kanoninėje kreivės koordinačių sistemoje. Tik lygtis (2.28) sąsiuvinio lape užima kiek daugiau vietos lyginant su paprastomis liestinių lygtimis kanoninėje koordinačių sistemoje.

Sąlyga Rasti kreivės $x^2 - xy - y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ liestines, lygiagrečias tiesei $2x + 2y - 1 = 0$.

Sprendimas

(i) Pažymėkime lietimosi tašką $(x_0; y_0)$. Liestinės lygtis yra

$$(x_0 - \frac{1}{2}y_0 - 1)x + (-\frac{1}{2}x_0 - y_0 + 1)y + (-x_0 + y_0 + 1) = 0 \ .$$

(ii) Parašome lygiagretumo sąlygą

$$\frac{x_0 - \frac{1}{2}y_0 - 1}{2} = \frac{-\frac{1}{2}x_0 - y_0 + 1}{2} \ .$$

(iii) Sprendžiame sistemą, sudarytą iš lygiagretumo sąlygos bei sąlygos

$$x_0^2 - x_0y_0 - y_0^2 - 2x_0 + 2y_0 + 1 = 0 \ ,$$

reiškiančios, kad lietimosi taškas priklauso kreivei. Gauname $\{x_0 = 1 \ , \ y_0 = 1\}$ ir $\{x_0 = 7/5 \ , \ y_0 = -1/5\}$.

(iv) Įstatę gautąsias x_0, y_0 reikšmes į liestinės lygtį, gauname dvi liestines:
$x + y - 2 = 0, \quad 5x + 5y - 6 = 0.$

12. Antros eilės kreivės skersmenys

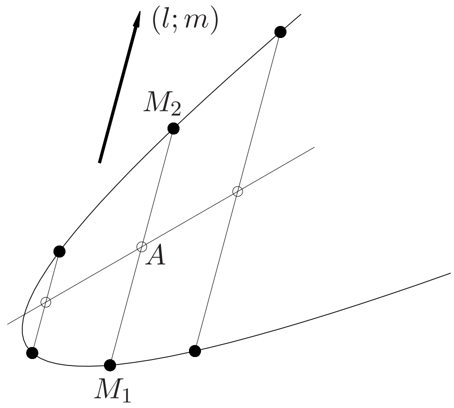
Fiksuojame neasimptotinės krypties vektorių $(l; m)$ ir sudarome šios krypties kreivės stygas.

Teiginys 8 *Antros eilės kreivės stygų, lygiagrečių vektoriui* $(l; m)$*, vidurio taškai priklauso tiesei*

$$(a_{11}l + a_{12}m)x + (a_{21}l + a_{22}m)y + a_{31}l + a_{32}m = 0 \ . \tag{2.30}$$

Įrodymas Tegul $A(x_0; y_0)$ yra krypties $(l; m)$ stygos $\overline{M_1M_2}$ vidurio taškas (žr. Pav. 2.6). Jei t_1, t_2 yra lygties (2.25) šaknys, tai

$$M_1 = (lt_1 + x_0; mt_1 + y_0) \ , \quad M_2 = (lt_2 + x_0; mt_2 + y_0) \ .$$



2.6: Kreivės skersmuo.

Kadangi $A(x_0;y_0)$ stygos $\overline{M_1M_2}$ vidurio taškas,tai

$$x_0 = l\frac{t_1+t_2}{2} + x_0 \,, \quad y_0 = m\frac{t_1+t_2}{2} + y_0 \,.$$

Iš šių lygybių gauname, kad $t_1 + t_2 = 0$. Todėl pagal Vijeto teoremą $Q = 0$, t.y.

$$(a_{11}l + a_{12}m)x_0 + (a_{21}l + a_{22}m)y_0 + a_{31}l + a_{32}m = 0 \,.$$

Ši lygybė galioja bet kurios stygos, turinčios kryptį $(l;m)$, vidurio taškui. Tuo įrodymą ir baigiame.

Tiesė, nusakoma lygtimi (2.30), vadinama *skersmeniu, jungtiniu* krypčiai $(l;m)$. Kadangi lygtis (2.30) yra pergrupuota sąlyga

$$Q = F_1(x,y)l + F_2(x,y)m = 0 \,,$$

kiekvienas skersmuo eina per kreivės centrą (jei jis egzistuoja).

13. Antros eilės kreivės simetrijos ašys

Simetrijos ašis dalija jai *statmenas* stygas pusiau, t.y. ji yra skersmuo, jungtinis sau statmenai krypčiai.

Centrinių kreivių atveju šios kryptys yra

$$(\cos\alpha_i; \sin\alpha_i) \ , \ \tan\alpha_i = \frac{\lambda_i - a_{11}}{a_{12}} \ , \ i = 1, 2 \ ,$$

o λ_1, λ_2 – charakteringosios lygties šaknys.

Parabolės atveju (mums įdomiausiu) jos simetrijos ašis sutampa su kanoninės koordinačių sistemos $O'x'y'$ x'-ašimi. Jau žinome, kad jos kryptis yra

$$(\cos\alpha; \sin\alpha) \text{ , kur } \tan\alpha = -\frac{a_{11}}{a_{12}} \ .$$

Kadangi vektorius $(-\sin\alpha; \cos\alpha)$ yra statmenas x'-ašiai, gauname paprastą būdą parabolės simetrijos ašiai rasti.

Išvada 2 *Parabolės simetrijos ašis apibrėžiama lygtimi (2.30), kur*

$$l = -\sin\alpha \ , \ m = \cos\alpha \ , \ \tan\alpha = -\frac{a_{11}}{a_{12}} \ .$$

Šios išvados visiškai pakanka efektyviam parabolės simetrijos ašiai radimui – pratybiniuose uždaviniuose tarpiniai nevisai žavingi skaičiai, susiję su sinuso ir kosinuso radimu, supaprastinami rašant galutinę simetrijos ašies lygtį. Naudodamiesi formulėmis (2.18) ir atlikdami šiuos supaprastinimus bendroje formoje, gauname, kad ieškodami parabolės simetrijos ašies pagal formulę (2.30) galime pasirinkti

$$l = a_{11} \ , \ m = a_{12} \ . \tag{2.31}$$

Sekančiame skyrelyje pamatysime, kodėl susirūpinome parabolės simetrijos ašimi – ją žinant galima gana efektyviai rasti parabolės kanoninę koordinačių sistemą. Bet prieš tai svarbus klausimas atidiems (priekabiems) studentams.

Šiokia tokia problemėlė Jei $a_{11} = a_{12} = 0$, praktiškai visi pateikti samprotavimai apie parabolės lygties prastinimą subyra į šipulius, nes $\tan\alpha = \frac{0}{0}$(!!!) *Ką tai reiškia ir kaip lengvai sausiems išbristi iš šios balos?*

13.1. Parabolės kanoninės koordinačių sistemos radimas

Praktiškai ieškoti parabolės kanoninės koordinačių sistemą, remiantis išdėstyta teorine medžiaga, nėra efektyvu (todėl nuobodu). Dabar pateiksime gal ir ne patį tobuliausią, bet visgi gana efektyvų kanoninės koordinačių sistemos radimo būdą.

Algoritmas

(1) Randame lygties invariantus.

(2) Randame posūkio kampo sinusą ir kosinusą.

(3) Randame parabolės simetrijos ašį.

(4) Randame parabolės viršūnę $(x_0; y_0)$ – simetrijos ašies ir parabolės sankirtą.

(5) Parašome *preliminarias* koordinačių sistemos transformacijos formules

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + x_0 \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + y_0. \end{cases} \tag{2.32}$$

(6) Iš jau žinomos teorinės dalies gauname, kad naujoje koordinačių sistemoje parabolės lygtis įgyja pavidalą

$$I_1 y'^2 + 2a'_{13} x' = 0 \ .$$

Koeficientą a'_{13} randame, įstatę išraiškas (2.32) į pradinę kreivės lygtį.

(7) Jei I_1 ir a'_{13} priešingų ženklų, tai po kelių aritmetinių veiksmų gauname kanoninę lygtį $y'^2 = 2px'$, $p > 0$. Šiuo atveju preliminarios formulės (2.32) yra galutinės.

(8) Jei I_1 ir a'_{13} vienodų ženklų, pasukus koordinačių sistemą 180^0 kampu koeficientas a'_{13} pakeičia ženklą, t.y. gauname prieš tai minėtą atvejį. Šioje situacijoje preliminarios formulės (2.32) keičiamos į

$$\begin{cases} x = \ - x' \cos\alpha + y' \sin\alpha + x_0 \\ y = \ - x' \sin\alpha - y' \cos\alpha + y_0. \end{cases}$$

(9) Pavargę ilsimės.

Pavyzdys Rasti parabolės $x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 14y + 29 = 0$ kanoninę lygtį ir kanoninę koordinačių sistemą.

Sprendimas

(1) Randame invariantus $I_1 = 2$, $I_2 = 0$, $I_3 = -16$. Pasinaudoję formule (2.23) gauname parabolės kanoninę lygtį $y'^2 = 2\sqrt{2}x'$.
(2) $\tan\alpha = 1$, todėl $\sin\alpha = \sqrt{2}/2$, $\sin\alpha = \sqrt{2}/2$.
(3) Simetrijos ašis $x - y + 5 = 0$.
(4) Parabolės viršūnė $(-2; 3)$.
(5) Preliminarios koordinačių sistemos transformacijos formulės:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y' - 2 \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y' + 3. \end{cases}$$

(6) $a'_{13} = -2\sqrt{2}$.
(7) ....
(8) ....
(9) *Darbas žmogų puošia.* (Iš šūkių gegužės 1-osios šventei)

14. Pratimai bei uždaviniai

Skyrių baigiame charakteringų šios dalies uždavinių rinkiniu.

1. Rasti kreivės $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$ kanoninę lygtį ir kanoninę koordinačių sistemą.

2. Rasti kreivės $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$ kanoninę lygtį ir kanoninę koordinačių sistemą.

3. Rasti kreivės $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$ kanoninę lygtį ir kanoninę koordinačių sistemą.

4. Invariantų pagalba parodyti, kad kreivė $x^2 + 4xy + 3y^2 - 6x - 12y + 9 = 0$ sudaryta iš tiesių ir rasti tų tiesių lygtis.

5. Invariantų pagalba parodyti, kad kreivė $4x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 6y + 5 = 0$ sudaryta iš tiesių ir rasti tų tiesių lygtis.

6. Invariantų pagalba parodyti, kad kreivė $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$ sudaryta iš tiesių ir rasti tų tiesių lygtis.

7. Invariantų pagalba parodyti, kad kreivė $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x - 30y + 23 = 0$ yra hiperbolė ir rasti jos asimptočių lygtis.

8. Rasti kreivės $x^2 + xy - y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ liestines, statmenas tiesei $x - y + 3 = 0$.

9. Žinomos antros eilės kreivės simetrijos ašys $x - y + 3 = 0$, $x + y - 1 = 0$ bei du jos taškai $(1; 1)$, $(0; 1)$. Rasti kreivės lygtį.

10. Žinoma parabolės simetrijos ašis $x - y + 1 = 0$ bei du jos taškai $(1; 1)$, $(0; 1)$. Rasti parabolės lygtį.

Skyrius 3

Antros eilės paviršiai

Skyriuje pateikiama Kęstučio Karčiausko iš Vilniaus universtiteto Matematikos ir Informatikos fakulteto paskaitų konspekto medžiaga.

1. Bendroji antros eilės paviršiaus lygtis

Tarkime yra fiksuota stačiakampė koordinačių sistema $Oxyz$. Bendroji antros eilės paviršiaus lygtis $F(x, y, z) = 0$ šios sistemos atžvilgiu yra

$$\begin{aligned} F(x,y,z) =& a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ &+ 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \; . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Remiantis bendrąja paviršiaus lygtimi sudaroma jos matrica A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} ,$$

apibrėžiant $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$, $a_{41} = a_{14}$, $a_{42} = a_{24}$, $a_{43} = a_{34}$. Matrica A yra simetrinė, t.y. $A^T = A$. Pažymėję

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

gauname matricinę antros paviršiaus lygties formą

$$F(x, y, z) = X^T AX = 0 \ .$$

Ši lygybė, kaip ir kreivių atveju, įrodoma elementariais skaičiavimais dauginant matricas. Taip pat analogiškai įrodoma, kad

$$F(x, y, z) = xF_1(x, y, z) + yF_2(x, y, z) + zF_3(x, y, z) + F_4(x, y, z) \ , \tag{3.2}$$

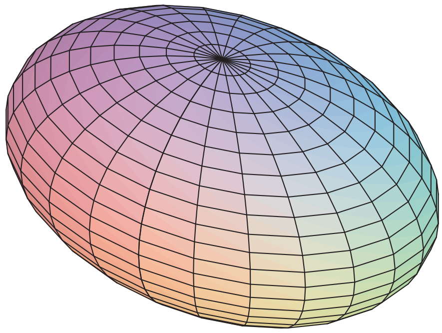
kur

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\ F_2(x, y, z) &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \\ F_3(x, y, z) &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} \\ F_4(x, y, z) &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44} \ . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Išraiška $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ paprastai vadinama kvadratine paviršiaus lygties dalimi, $2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z$ – tiesine dalimi, o a_{44} – laisvuoju nariu.

2. Kanoninės antros eilės paviršių lygtys

Antros eilės paviršių lygčių prastinimas panašus į lygčių prastinimo procedūrą kreivių atveju – apibrėžiami invariantai, charakteringoji lygtis, paviršiaus centras ir t.t... Džiugi žinia studentams – šitą dalį mes praleidžiame. Bet ši žinia gali transformuotis į nežinią – studentas taip nieko ir nesužinos apie paviršius. Neleisdami įvykti tokiai šiurpiai katastrofai, supažindinsime jus su kanoninėmis antros eilės paviršių lygtimis. Vėliau, naudodamiesi šiomis lygtimis, panagrinėsime paprasčiausias



3.1: Elipsoidas.

paviršių geometrines savybes. Tokiu būdu bent kiek susipažinsite su paviršių teorija. Dabar gal ir nepajusite, kad, lyginant su kreivėmis, paviršių matematinis nagrinėjimas yra žymiai sudėtingesnis. Bet nepamirškite – dauguma naudingų objektų (automobiliai, batai, ...) yra sudaryti iš įmantrių paviršių.

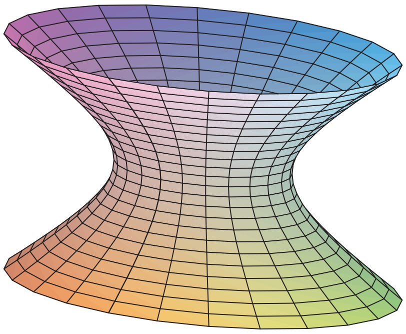
Dabar pateikiame pilną kanoninių lygčių sąrašą, įtraukdami į jį ir paviršius, sudarytus iš plokštumų, bei menamus paviršius. Bet piešiame ne visus paviršius – menamų nėra ką ir piešti, o paviršiai, sudaryti iš plokštumų, puikiai suvokiami ir be piešinio pagalbos.

1. Elipsoidas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,. \tag{3.4}$$

2. Menamas elipsoidas

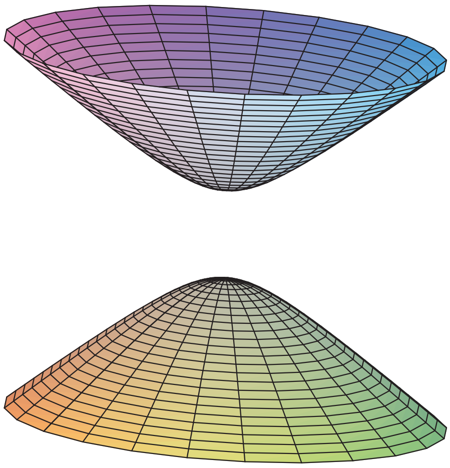
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1\,. \tag{3.5}$$



3.2: Vienašakis hiperboloidas.

3. Vienašakis hiperboloidas
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,. \tag{3.6}$$

4. Dvišakis hiperboloidas
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,. \tag{3.7}$$



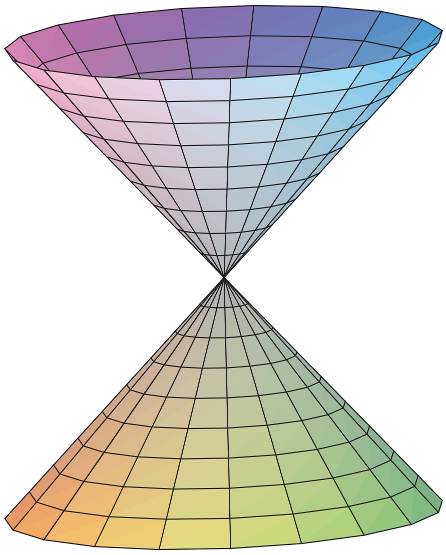
3.3: Dvišakis hiperboloidas.

5. Kūgis

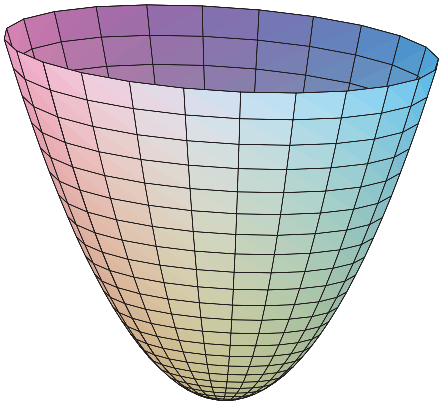
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\,. \tag{3.8}$$

6. Menamas kūgis

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0\,. \tag{3.9}$$



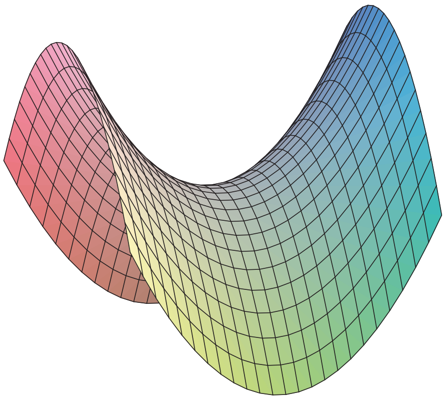
3.4: Kūgis.



3.5: Elipsinis paraboloidas.

7. Elipsinis paraboloidas
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z\,. \tag{3.10}$$

8. Hiperbolinis paraboloidas
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z\,. \tag{3.11}$$



3.6: Hiperbolinis paraboloidas.

9. Elipsinis cilindras

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ . \tag{3.12}$$

10. Hiperbolinis cilindras

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ . \tag{3.13}$$

11. Menamas elipsinis cilindras

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1\ . \tag{3.14}$$

12. Parabolinis cilindras

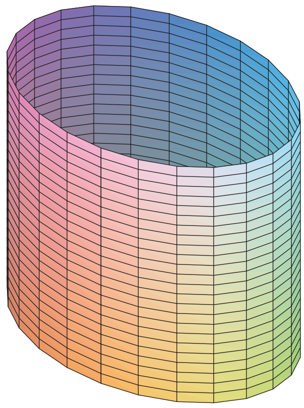
$$y^2 = 2px\ . \tag{3.15}$$

13. Pora susikertančių plokštumų

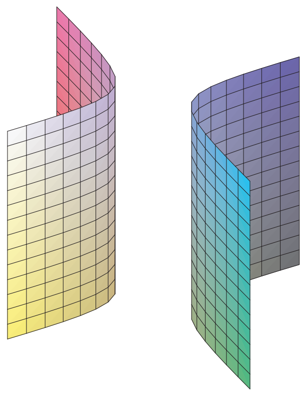
$$a^2x^2 - b^2y^2 = 0\ . \tag{3.16}$$

14. Pora menamų susikertančių plokštumų

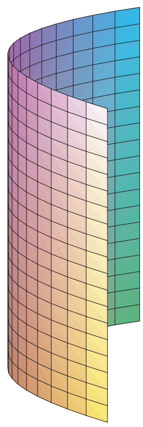
$$a^2x^2 + b^2y^2 = 0\ . \tag{3.17}$$



3.7: Elipsinis cilindras.



3.8: Hiperbolinis cilindras.



3.9: Parabolinis cilindras.

15. Pora lygiagrečių plokštumų

$$y^2 = a^2 \; . \tag{3.18}$$

16. Pora menamų lygiagrečių plokštumų

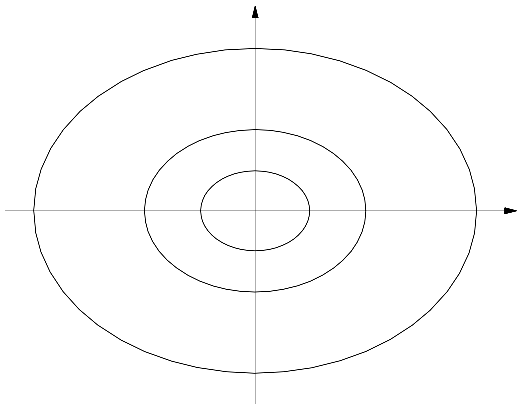
$$y^2 = -a^2 \; . \tag{3.19}$$

17. Dviguba plokštuma

$$y^2 = 0 \; . \tag{3.20}$$

3. Antros eilės paviršių formos tyrimas

Ištirsime antros eilės paviršius, matematiškai pagrįsdami paveikslėliuose pavaizduotas formas. Šiam tikslui panaudosime seną (labai labai seną, iš tų neatmenamų laikų, kai žmonės dar nežinojo kas yra kompiuteris ir internetas) metodą: paviršius "pjaustomas" lygiagrečiomis plokštumos; plokštumos ir paviršiaus sankirta yra kreivė; stebint kaip keičiasi sankirtos kreivė suvokiama (pajaučiama) ir paties paviršiaus forma. Pradžioje įrodysime keletą pagalbinių teiginių.



3.10: Panašios elipsės: $k = 1$ – išorinė elipsė; $k = 1/2$ – tarpinė elipsė; $k = 1/4$ – vidinė elipsė.

Teiginys 9 *Lygtis*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k^2 \;, k > 0 \;,$$

apibrėžia elipsę, kurios: centras yra $(0; 0)$*; pusašės lygios* ka *ir* kb*; viršūnės priklauso koordinatinėms ašims (Pav.3.10).*

Įrodymas Lygtį dalijame iš k^2 ir gauname

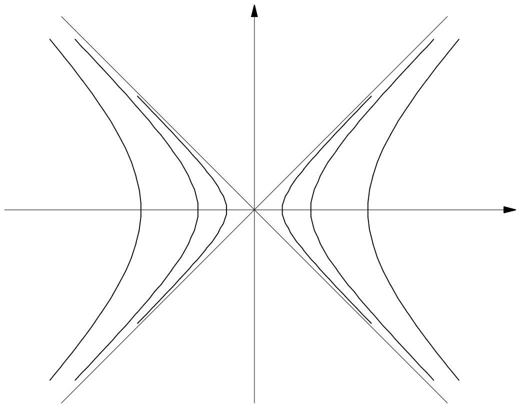
$$\frac{x^2}{(ka)^2} + \frac{y^2}{(kb)^2} = 1 \;.$$

Ši kreivės lygties forma ir užbaigia įrodymą (prisiminkime, ką turėjome žinoti apie elipsę).

Teiginys 10 *Lygtis*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k^2 \;, k > 0 \;,$$

apibrėžia hiperbolę, kurios: centras yra $(0; 0)$*; realioji pusašė lygi* ka*; asimptotės yra* $y = \pm\frac{b}{a}x$*; viršūnės priklauso* x*-ašiai (Pav.3.11).*



3.11: Panašios hiperbolės: $k=1$ – išorinė hiperbolė; $k=1/2$ – tarpinė hiperbolė; $k=1/4$ – vidinė hiperbolė.

Ką tik pateikto įrodymo dvynys Lygtį dalijame iš k^2 ir gauname

$$\frac{x^2}{(ka)^2}-\frac{y^2}{(kb)^2}=1\ .$$

Teiginys 11 *Lygtis*

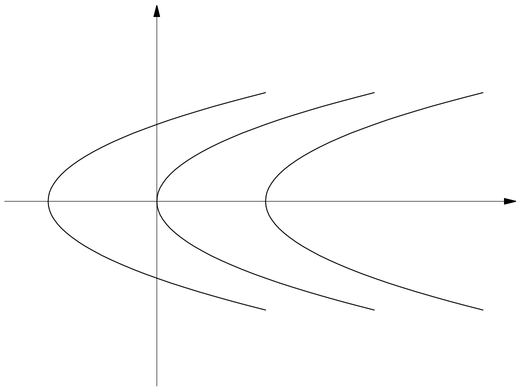
$$y^2=2px+a$$

apibrėžia parabolę, kuri gaunama iš parabolės $y^2 = 2px$ *lygiagrečiai ją pastūmus vektoriaus* $(-\frac{a}{2p};0)$ *kryptimi ir dydžiu (Pav.3.12).*

Įrodymas Lygtį parašome pavidale

$$y^2=2p(x+\frac{a}{2p})\ .$$

Šiais teiginiais naudosimės tirdami lygiagrečius paviršių piūvius. Papildoma svarbi informacija apie paviršiaus formą gaunama stebint, kokiomis kreivėmis juda charakteringi lygiagrečių piūvių taškai – kreivių viršūnės.



3.12: Panašios parabolės: $a = 0$ – tarpinė parabolė; $a = 1$ – kairioji parabolė; $a = -1$ – dešinioji parabolė.

3.1. Cilindrai

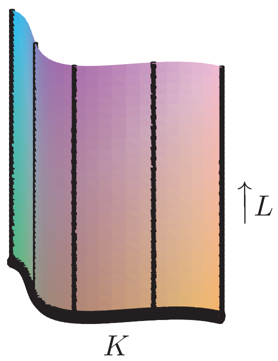
Pradėkime nuo lengviausiai suvokiamų paviršių – cilindrų. Nors šis terminas žinomas iš mokyklos laikų, pasitikslinkime jį.

Apibrėžimas 14 *Bet kokiai kreivei K ir krypčiai $L = (l; m; n)$* cilindru *vadiname paviršių, kurį sudaro krypties L tiesės, kertančios kreivę K.*

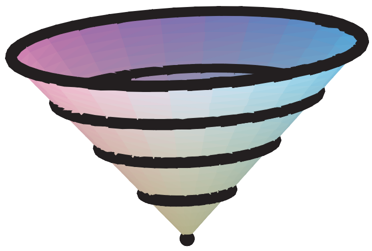
Įsidėmėkite – kreivė K yra bet kokia (jokių specialių sąlygų, žr. Pav. 3.13).

Jei gerai žinomą vamzdį (K yra apskritimas, L – jo plokštumai statmena kryptis) prikimšite sprogmenų ir išdykaudami bumptelsite, vamzdžio aišku neliks, bet ką tik griežtai matematiškai apibrėžtu cilindru atsikratyti nepavyks. Veikiausiai teks sušluoti aibę dalelių, panašių į pavaizduotą Pav. 3.13.

Jei konkrečioje paviršiaus lygtyje $F(x, y, z) = 0$ nėra kintamojo z, tai tokia lygtis apibrėžia cilindrą, sudarytą iš tiesių, lygiagrečių z-ašiai, ir kertančių xy-plokštumos kreivę, apibrėžtą lygtimi $F(x, y) = 0$. Ši kukli pastaba paaiškina elipsinio, hiperbolinio ir parabolinio cilindrų formą bei pavadinimą.



3.13: Bendrasis cilindras.



3.14: Kūgio piūviai.

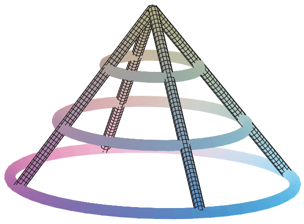
3.2. Kūgis

Kadangi kūgio lygtyje (3.8) kintamieji x, y, z yra tik kvadrate, $x-$, $y-$ ir $z-$plokštumos yra jo simetrijos plokštumos. Todėl užtenka panagrinėti tik vieną iš simetrinių kūgio dalių, pavyzdžiui $z \geq 0$.

Plokštumos $z = z_0$ ir kūgio sankirta yra elipsė

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k^2, \quad \text{kur} \quad k^2 = \frac{z_0^2}{c^2}\,.$$

Naudodamiesi Teiginiu 9 gauname, kad kūgis sudarytas iš mažėjančių panašių elipsių (žr. Pav. 3.14). Plokštumoje $z = 0$ elipsė susitraukia į tašką . Šių elipsių viršūnės yra plokštumose $x = 0$ ir $y = 0$,



3.15: Kūgio griaučiai.

kurios su kūgiu kertasi tiesėmis

$$\begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{y}{b} - \dfrac{z}{c} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = 0 \end{cases}.$$

Plokštumomis $z = z_0$ iškertamų elipsių viršūnės šliaužia šiomis tiesėmis. Paėmę dalį (nei per tankiai, nei per retai) šių lygiagrečių elipsių ir tieses, kuriomis juda jų viršūnės, gauname ganėtinai charakteringą modelį – paviršiaus griaučius. Jie pakankamai gerai apibūdina patį paviršių, nors, kaip ir kur nors vidurnaktį beslampinėjantis skeletas, didelio žavesio nekelia.

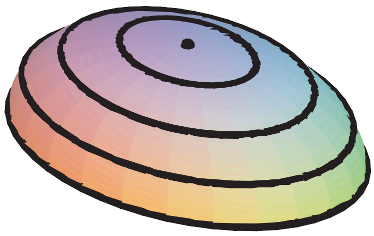
Dar viena svarbi pastaba. Per tašką $A(x_0; y_0, z_0)$ ir kūgio *viršūnę* $(0; 0; 0)$ einančios tiesės bet kuris taškas turi pavidalą $(tx_0; ty_0, tz_0)$. Todėl, jei A priklauso kūgiui,

$$(tx_0)^2 + (ty_0)^2 + (tz_0)^2 = t^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = 0 \,,$$

t.y. visa tiesė priklauso kūgiui. Vadinasi, kūgį galime sudaryti iš tiesių, išvesdami jas per kūgio viršūnę ir elipsės

$$\begin{cases} z = c \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

taškus.



3.16: Elipsoido piūviai.

3.3. Elipsoidas

Iš elipsoido lygties (3.4) gauname, kad jis yra "dėžutėje", apibrėžtoje nelygybėmis

$$|x| \leq a \quad , \quad |y| \leq b \quad , \quad |z| \leq c\,.$$

Analogiškai išnagrinėtam kūgio atvejui, $x-$, $y-$ ir $z-$plokštumos yra elipsoido simetrijos plokštumos. Plokštumos $z = z_0$ ir elipsoido sankirta (žr. Pav. 3.16) yra elipsė

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k^2, \quad \text{kur} \quad k^2 = 1 - \frac{z_0^2}{c^2}\,.$$

Šių lygiagrečių elipsių viršūnės juda elipsėmis

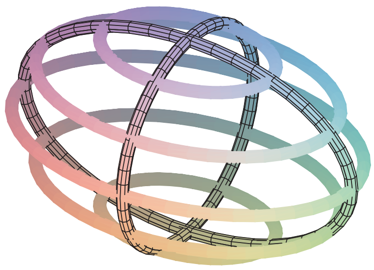
$$\begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}.$$

Kai $|z_0| = c$, elipsė susitraukia į tašką. Elipsoido griaučiai pavaizduoti Pav. 3.17.

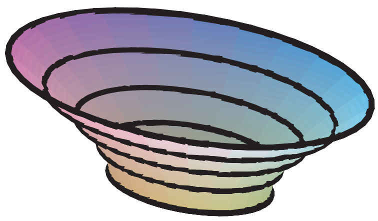
3.4. Vienašakis hiperboloidas

Iš vienašakio hiperboloido lygties (3.6) gauname, kad $x-$, $y-$ ir $z-$plokštumos yra jo simetrijos plokštumos. Plokštumos $z = z_0$ ir vienašakio hiperboloido sankirta (žr. Pav. 3.18) yra elipsė

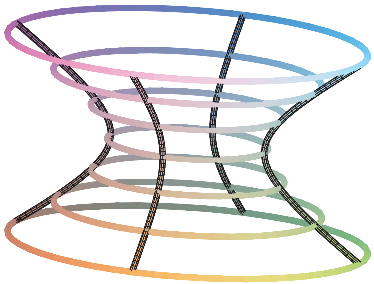
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k^2, \quad \text{kur} \quad k^2 = 1 + \frac{z_0^2}{c^2}\,.$$



3.17: Elipsoido griaučiai.



3.18: Vienašakio hiperboloido piūviai.



3.19: Vienašakio hiperboloido griaučiai.

Šių lygiagrečių elipsių viršūnės juda hiperbolėmis

$$\begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}.$$

Mažiausią elipsę gauname, kai $z_0 = 0$. Ji vadinama vienašakio hiperboloido *žiotimis*. Vienašakio hiperboloido griaučiai pavaizduoti Pav. 3.19.

3.5. Dvišakis hiperboloidas

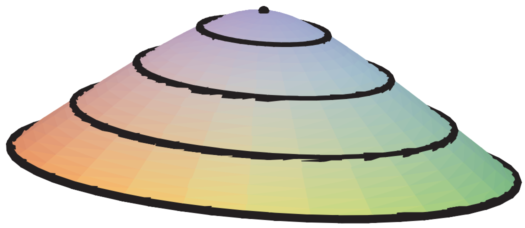
Iš dvišakio hiperboloido lygties (3.7) gauname, kad $x-$, $y-$ ir $z-$plokštumos yra jo simetrijos plokštumos. Plokštumos $z = z_0$ ir dvišakio hiperboloido sankirta (žr. Pav. 3.20) yra elipsė

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k^2, \quad \text{kur} \quad k^2 = \frac{z_0^2}{c^2} - 1\ .$$

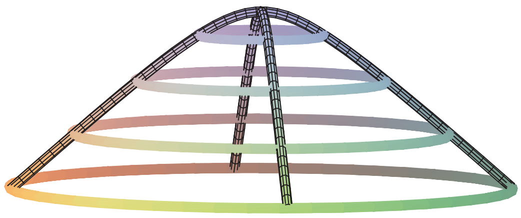
Šių lygiagrečių elipsių viršūnės juda hiperbolėmis

$$\begin{cases} x = 0 \\ -\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 0 \\ -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}.$$

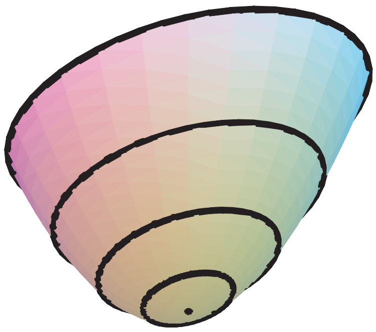
Kai $|z_0| = c$, elipsė susitraukia į tašką. Dvišakio hiperboloido griaučiai pavaizduoti Pav. 3.21. (Pav. 3.20 ir Pav. 3.21 pavaizduota tik viena šio paviršiaus dalis.)



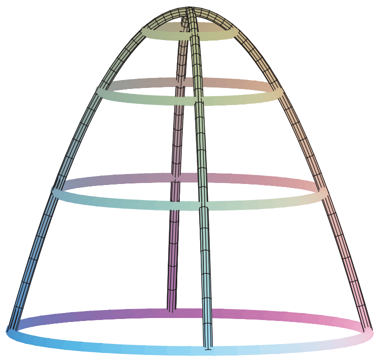
3.20: Dvišakio hiperboloido piūviai.



3.21: Dvišakio hiperboloido griaučiai.



3.22: Elipsinio paraboloido piūviai.



3.23: Elipsinio paraboloido griaučiai.

3.6. Elipsinis paraboloidas

Iš elipsinio paraboloido lygties (3.10) gauname, kad $x-$ ir $y-$plokštumos yra jo simetrijos plokštumos. Plokštumos $z = z_0$, $z_0 \geq 0$, ir elipsinio paraboloido sankirta (žr. Pav. 3.22) yra elipsė

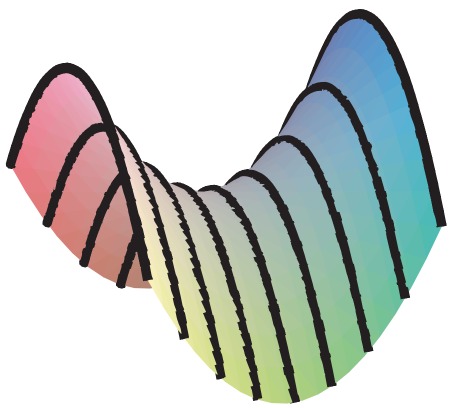
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k^2, \quad \text{kur} \quad k^2 = 2z_0 \ .$$

Šių lygiagrečių elipsių viršūnės juda parabolėmis

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2b^2 z \end{cases}, \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 2a^2 z \end{cases}.$$

Kai $z_0 = 0$, elipsė susitraukia į tašką. Elipsinio paraboloido griaučiai pavaizduoti Pav. 3.23.

3.24: Hiperbolinio paraboloido "hiperboliniai" piūviai.



3.25: Hiperbolinio paraboloido "paraboliniai" piūviai.

3.26: Hiperbolinio paraboloido griaučiai.

3.7. Hiperbolinis paraboloidas

Iš hiperbolinio paraboloido lygties (3.11) gauname, kad $x-$ ir $y-$plokštumos yra jo simetrijos plokštumos. Plokštumos $z = z_0$ ir hiperbolinio paraboloido sankirta (žr. Pav. 3.24) yra hiperbolė

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k^2, \quad k^2 = 2z_0 \, , z_0 \geq 0 \, ;$$
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k^2, \quad k^2 = -2z_0 \, , z_0 \leq 0 \, .$$

Pasitelkę Teiginį 10 galime nesunkiai priprasti prie tokio hiperbolinio paraboloido modelio. Visgi daugelis geriau suvokia šio paviršiaus formą, kai jis raikomas lygiagrečiomis plokštumomis $y = y_0$ (žr. Pav. 3.25). Šiuo atveju paviršiaus formos pojūtį skatina Teiginys 11.

Hiperbolinio paraboloido ir plokštumos $y = y_0$ sankirta yra parabolė

$$x^2 = 2a^2 z + \frac{a^2}{b^2} y_0^2 \, .$$

Šių lygiagrečių parabolių viršūnės juda parabole

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = -\,2b^2 z \end{cases} .$$

Hiperbolinio paraboloido griaučiai pavaizduoti Pav. 3.26.

4. Antros eilės paviršių tiesinės sudaromosios

Antros eilės paviršiaus *tiesine sudaromąja* vadiname jam priklausančią tiesę. Keletas žodžių apie terminą *sudaromoji*. Galima nurodyti ne vieną bendresnį, ne antros eilės paviršių, turintį jam priklausančias tieses, kurios nevadinamos sudaromosiomis. Priežastis: tik tos kelios tiesės, jokios kitos, priklauso paviršiui; antros eilės paviršių atveju jam priklausančią tiesę galima tolygiai judinti taip, kad pajudintos tiesės liktų paviršiuje; pajudintosios tiesės *sudaro* (užpildo) visą paviršių.

Akivaizdu, kad visi cilindrai turi tiesines sudaromąsias. Skyrelio 3.2. pabaigoje parodėme, kad kūgis irgi turi tiesines sudaromąsias. Prieš pradedant nagrinėti vienašakį hiperboloidą ir hiperbolinį paraboloidą įrodysime *neigiamo* pobūdžio teiginį.

Teiginys 12 *Elipsoidas, dvišakis hiperboloidas ir elipsinis paraboloidas neturi jiems priklausančių tiesių.*

Įrodymas 1) Elipsoidas. Akivaizdu, nes tikrai nepavyks *begalinės* tieses sukimšti į "dėžutę" $\{|x| \leq a\ ,\ |y| \leq b\ , |z| \leq c\}$.

2) Dvišakis hiperboloidas. Tiesė, kuri nelygiagreti xy-plokštumai, negali priklausyti dvišakiui hiperboloidui: ji kirstų plokštumas $z = c$ ir $z = -c$, tarp kurių nėra paviršiaus taškų. Kaip jau žinome, plokštumos $z = z_0$ ir dvišakio hiperboloido sankirta yra elipsė. Tai nepalieka tiesei jokių galimybių priklausyti paviršiui.

3) Elipsinis paraboloidas. Samprotaujame panašiai kaip ir dvišakio hiperboloido atveju, nes elipsinis paraboloidas neturi taškų erdvės dalyje $z < 0$.

Vienašakis hiperboloidas

Vienašakio hiperboloido lygtį (3.6) parašome pavidale

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{b}\right)=\left(1-\frac{y}{c}\right)\left(1+\frac{y}{c}\right).$$

Iš šio vienašakio hiperboloido lygties pavidalo lengvai gauname, kad tiesės

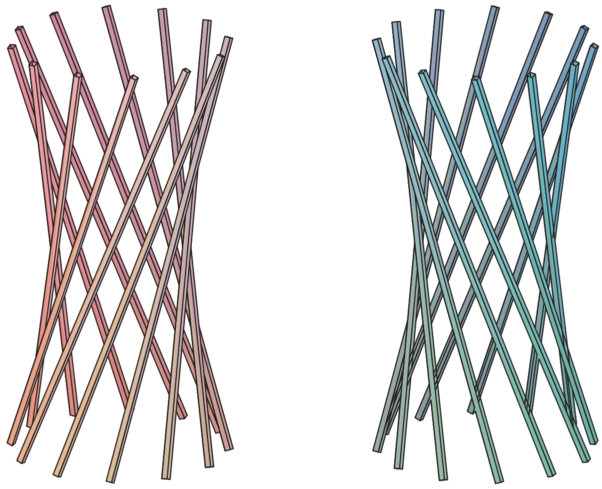
$$\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{z}{b}=\mu_1\left(1-\frac{y}{c}\right)\\ \mu_1\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{b}\right)=1+\frac{y}{c}\end{cases}, \tag{3.21}$$

$$\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{z}{b}=\mu_2\left(1+\frac{y}{c}\right)\\ \mu_2\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{b}\right)=1-\frac{y}{c}\end{cases} \tag{3.22}$$

priklauso paviršiui. Tolydžiai keisdami parametrus μ_1 ir μ_2 gauname dvi tiesinių sudaromųjų šeimas. Abiejų šeimų tiesės pavaizduotos Pav. 3.27. Bet, jei būsime preciziškai tikslūs, šios tiesių šeimos neužpildo viso vienašakio hiperboloido – paviršiuje lieka mažytis plyšelis. Šį plyšelį=neužpildytą tiesę panaikiname apibrėždami kiekvienos šeimos ribines tieses

$$\lim_{\mu_1\to\infty}\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{z}{b}=\mu_1\left(1-\frac{y}{c}\right)\\ \mu_1\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{b}\right)=1+\frac{y}{c}\end{cases}=\lim_{\mu_1\to\infty}\begin{cases}\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{b}\right)=1-\frac{y}{c}\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{b}=\frac{1}{\mu_1}\left(1+\frac{y}{c}\right)\end{cases}=\begin{cases}1-\frac{y}{c}=0\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{b}=0\end{cases},$$

$$\lim_{\mu_2\to\infty}\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{z}{b}=\mu_2\left(1+\frac{y}{c}\right)\\ \mu_2\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{b}\right)=1-\frac{y}{c}\end{cases}=\lim_{\mu_2\to\infty}\begin{cases}\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{b}\right)=1+\frac{y}{c}\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{b}=\frac{1}{\mu_2}\left(1-\frac{y}{c}\right)\end{cases}=\begin{cases}1+\frac{y}{c}=0\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{b}=0\end{cases}.$$



3.27: Vienašakio hiperboloido tiesinės sudaromosios.

Hiperbolinis paraboloidas

Hiperbolinio paraboloido lygtį (3.11) parašome pavidale

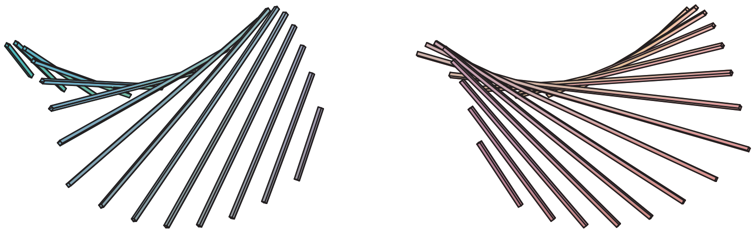
$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2z\ .$$

Iš šio hiperbolinio paraboloido lygties pavidalo lengvai gauname, kad tiesės

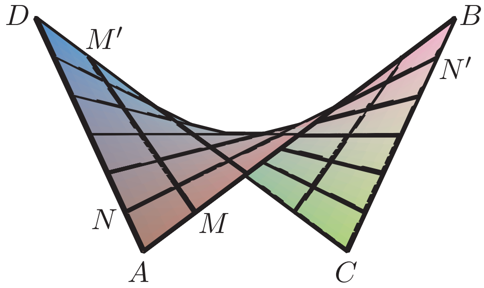
$$\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\mu_1\\ \mu_1\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2z\end{cases}, \tag{3.23}$$

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\mu_2\\ \mu_2\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2z\end{cases} \tag{3.24}$$

priklauso paviršiui. Tolydžiai keisdami parametrus μ_1 ir μ_2 gauname dvi tiesinių sudaromųjų šeimas. Abiejų šeimų tiesės pavaizduotos Pav. 3.28.



3.28: Hiperbolinio paraboloido tiesinės sudaromosios.



3.29: Bitiesinis hiperbolinio paraboloido modelis.

Pateikiame dar vieną hiperbolinio paraboloido modelį, kuris vartojamas geometriniame modeliavime.

Tegul A, B, C,D yra *erdvinio* keturkampio viršūnės. Paimkime visas tieses $\overline{MM'}$, kur $M \in \overline{AB}$, $M' \in \overline{DC}$ ir taškai M, M' dalo atkarpas $\overline{AB}$, $\overline{DC}$ tuo pačiu santykiu. Tokių tiesių visuma sudaro hiperbolinį paraboloidą. Kitą tiesinių sudaromųjų šeimą gauname imdami tieses $\overline{NN'}$, kur taškai N, N' dalo atkarpas $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ tuo pačiu santykiu. Šis *bitiesiniu* vadinamas hiperbolinio paraboloido modelis pavaizduotas Pav. 3.29.

5. Sukimosi paviršiai

Sukimosi paviršiai buvo atrasti labai seniai, kai iš primityvios beždžionės išsivystęs žmogus panoro turėti patogius indus valgiui ir troškulio malšinimui. Greitai puodžiaus (kaip šiom dienom informatiko) profesija pasidarė gana populiari, nes užtikrino pakankamai gerą pragyvenimo lygį. Pažvelkime į puodžiaus darbo procesą matematiko akimis – kadangi ruošiatės įgyti panašią garbingą profesiją, šio proceso supratimas turėtų padėti suvokti antros eilės paviršiaus formą.

Tegul kreivė K yra sukama apie kokią nors ašį L. Pradinės kreivės taškai sukdamiesi brėžia apskritimus, kurių visuma sudaro *sukimosi* paviršių. Dalis sukimosi paviršiaus pavaizduota Pav. 3.30.

Specialiai parinkus kai kurių antros eilės paviršių parametrus, jie tampa sukimosi paviršiais. Suprasti, kaip tai atsitinka, padės ši paprasta pastaba.

Teiginys 13 *Tegul kreivė* K

$$\begin{cases} y = 0 \\ dx^2 + g(z) = 0 \end{cases}$$

yra sukama apie z*-ašį. Sukimosi paviršiaus lygtis yra*

$$d(x^2 + y^2) + g(z) = 0 \ .$$

Įrodymas Tegul $M(x; 0; z)$ yra pradinės kreivės K taškas. Sukant kreivę K apie z-ašį, judančio taško M atstumas iki z-ašies bei jo z-koordinatė nesikeičia. Taško $M(x; y; z)$ atstumo iki z-ašies kvadratas yra $x^2 + y^2$. Todėl taškui M sukantis apie z-ašį pradinė sąlyga $y = 0$, $dx^2 + g(z) = 0$ pasikeičia į $d(x^2 + y^2) + g(z) = 0$.

5.1. Sukimosi elipsoidas

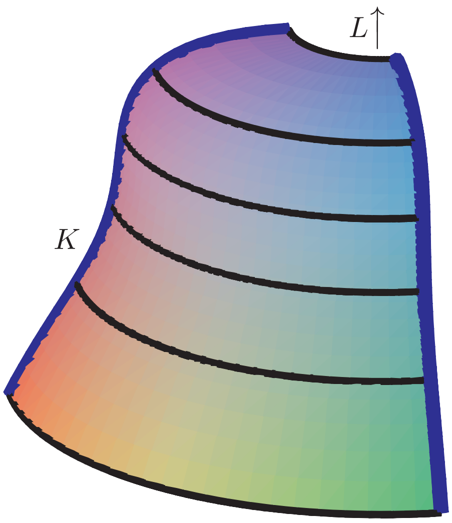
Kreive K pasirenkame elipsę

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

Remiantis Teiginiu 13 gauname, kad sukimosi paviršiaus lygtis yra

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ .$$

Taigi lygtis (3.4) apibrėžia sukimosi elipsoidą, jei $a = b$. Papildoma sąlyga $a = b = c$ reiškia, kad turime spindulio a sferą.



3.30: Sukimosi paviršius.

5.2. Vienašakis sukimosi hiperboloidas

Kreive K pasirenkame hiperbolę

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

Sukimosi paviršiaus lygtis yra

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \; .$$

Lygtis (3.6) apibrėžia vienašakį sukimosi hiperboloidą, jei $a = b$.

5.3. Dvišakis sukimosi hiperboloidas

Kreive K pasirenkame hiperbolę

$$\begin{cases} y = 0 \\ -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

Sukimosi paviršiaus lygtis yra

$$-\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ .$$

Lygtis (3.7) apibrėžia dvišakį sukimosi hiperboloidą, jei $a = b$.

5.4. Elipsinis sukimosi paraboloidas

Kreive K pasirenkame parabolę

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} = 2z \end{cases}$$

Sukimosi paviršiaus lygtis yra

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = 2z \ .$$

Lygtis (3.10) apibrėžia elipsinį sukimosi paraboloidą, jei $a = b$.

5.5. Elipsinis sukimosi cilindras

Kreive K pasirenkame porą lygiagrečių tiesių

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \end{cases}$$

Sukimosi paviršiaus lygtis yra

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = 1 \ .$$

Lygtis (3.12) apibrėžia elipsinį sukimosi cilindrą, jei $a = b$.

6. Plokštumos ir antros eilės paviršiaus sankirta

Tirdami antros eilės paviršius kirtome juos *specialiai parinktomis* plokštumomis, gaudami antros eilės kreives. Kertant antros eilės paviršių *bet kokia* plokštuma taip pat gauname antros eilės kreives:

1) pasirenkame koordinačių sistemą $O'x'y'z'$ taip, kad kertamoji sutaptų su plokštuma $z' = 0$;

2) įstatę $z' = 0$ į paviršiaus lygtį $F'(x', y', z') = 0$ gauname antros eilės kreivės lygtį $F'(x', y', 0) = 0$ atžvilgiu koordinačių sistemos $O'x'y'$;

3) tiriame gautąją antros eilės kreivės lygtį.

Ką tik aprašyta procedūra nesunkiai programuojama kompiuteriniam šio uždavinio sprendimui. Studentai jos nemėgsta, kai reikia skaičiuoti naudojantis tik rašikliu ir popieriaus lapu – tenka parinkti koordinačių sistemą $O'x'y'$, o po to rasti kanoninę sankirtos lygtį. Tai nemažos apimties skaičiavimai, smarkiai erzinantys normalų studentą. Bet jei reikia rasti tik sankirtos kreivės tipą, skaičiavimai žymiai supaprastėja.

Pavyzdys

Sąlyga Rasti paviršiaus $x^2+2y^2+z^2+2xy-2x-2y+4z+2 = 0$ ir plokštumos $2x+y-z-2 = 0$ sankirtos kreivės tipą.

Sprendimas Spreskime šį uždavinį taip, kaip, daug nesukdami galvos, sprendžia daugelis studentų. Ir tik pabaigoje panagrinėsime, kodėl jį išsprendėme teisingai.

Reikia rasti sankirtos kreivę? Jokių problemų, sprendžiame sistemą

$$\begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2x - 2y + 4z + 2 = 0 \end{cases},$$

įstatydami išraišką $z = 2x + y - 2$ į antrąją lygtį. Taip gauname lygtį

$$9x^2 + 10xy + 4y^2 - 10x - 6y + 2 = 0 \tag{3.25}$$

Skaičiuojame šios lygties invariantus: $I_1 = 13$, $I_2 = 11$, $I_3 = -9$. Kadangi $I_2 > 0$. o I_1 ir I_3 priešingų ženklų, lygtis (3.25) apibrėžia elipsę. Rašydami

Atsakymas Sankirtos kreivė yra elipsė.

gaunate visus šiam uždaviniui skirtus balus. Atsargiai(!!!), tik neplepėkite, kad lygtis (3.25) yra *sankirtos kreivės* lygtis. Jums priklausantis balas tikrai bus sumažintas. Lygtis (3.25) yra sankirtos kreivės *projekcijos* į xy-plokštumą lygtis. Kadangi, projektuojant antros eilės kreivę į plokštumą, jos tipas nesikeičia, atsakymas *teisingas*.

Geras pratimas Kada sankirtos kreivė yra žemesnio (ne antrojo) laipsnio?

Dar geresnis pratimas Panagrinėkite, kokio tipo kreives gauname kirsdami plokštuma: elipsoidą; vienašakį hiperboloidą; dvišakį hiperboloidą; kūgį; elipsinį paraboloidą; hiperbolinį paraboloidą; elipsinį cilindrą; hiperbolinį cilindrą; parabolinį cilindrą.

7. Antros eilės paviršiaus ir tiesės sankirta

Ši procedūra visiškai analogiška išnagrinėtai kreivių atveju.

Jei žinomas tiesės taškas $A(x_0; y_0; z_0)$ ir jos krypties vektorius $L(l; m; n)$, bet kurio tiesės taško $M(x; y; z)$ koordinates parašome pavidale

$$\begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \\ z = nt + z_0 \end{cases} \tag{3.26}$$

Įstatę šias išraiškas į bendrąją paviršiaus lygtį (3.1) ir sugrupavę gautojo reiškinio narius atžvilgiu t, gauname lygtį

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0 \, , \tag{3.27}$$

kur

$$\begin{aligned} &P = a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{13}ln + 2a_{23}mn \, , \\ &Q = F_1(x_0, y_0, z_0)l + F_2(x_0, y_0, z_0)m + F_3(x_0, y_0, z_0)n \, , \\ &R = F(x_0, y_0, z_0) \, . \end{aligned} \tag{3.28}$$

Įstatę lygties (3.27) šaknis t_1, t_2 į (3.26) gauname bendrųjų tiesės ir antros eilės paviršiaus taškų koordinates.

Bendru atveju, jei $P \neq 0$, gauname, kad *kvadratinė* lygtis (3.27):

- turi dvi skirtingas šaknis – tiesė kerta paviršių dviejuose taškuose;

- turi vieną šaknį – tiesė kerta paviršių *kartotiniame* taške;
- neturi šaknų – tiesė paviršiaus nekerta.

Apibrėžimas 15 *Vektoriaus $L(l;m;n)$ kryptis vadinama* asimptotine*, jei*

$$a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{13}ln + 2a_{23}mn = 0 \ . \tag{3.29}$$

Asimptotinės krypties atveju lygtis (3.27):

- ○ turi vieną šaknį – tiesė kerta paviršių *viename* taške;
- ○ neturi šaknų – tiesė paviršiaus nekerta;
- ○ turi be galo daug šaknų (virsta tapatybe $0 = 0$) – tiesė priklauso paviršiui.

8. Antros eilės paviršiaus liečiamoji plokštuma

Ši dalis analogiška jau nagrinėtoms antros eilės kreivių liestinėms.

Apibrėžimas 16 *Neasimptotinės krypties tiesė vadinama antros eilės paviršiaus liestine taške A, jei A yra kartotinis tiesės ir paviršiaus sankirtos taškas. Asimptotinės krypties tiesė vadinama antros eilės paviršiaus liestine, jei ji priklauso paviršiui.*

Teiginys 14 *Tiesės, liečiančios paviršių taške $A(x_0;y_0;z_0)$ sudaro plokštumą, kurios lygtis yra*

$$F_1(x_0,y_0,z_0)x + F_2(x_0,y_0,z_0)y + F_3(x_0,y_0,z_0)z + F_4(x_0,y_0,z_0) = 0 \ . \tag{3.30}$$

Įrodymas Tarkime liestinės krypties vektorius yra $(l;m;n)$. Lygtis (3.27) įgyja pavidalą

$$Pt^2 + 2Qt = 0 \ ,$$

nes A priklauso paviršiui, t.y. $R = F(x_0,y_0,z_0) = 0$. Ši lygtis tikrai turi šaknį $t = 0$. Jei $(l;m;n)$ yra neasimptotinės krypties, tai ši šaknis yra kartotinė. Todėl $Q = 0$. Jei $(l;m;n)$ yra asimptotinės krypties, tai $P = 0$. Šiuo atveju tiesė priklauso paviršiui, jei $Q = 0$. Vadinasi, bet kuriuo atveju būtina ir pakankama lietimosi sąlyga yra

$$Q = F_1(x_0, y_0, z_0)l + F_2(x_0, y_0, z_0)m + F_3(x_0, y_0, z_0)n = 0 \ .$$

Kadangi $(l; m; n)$ yra liestinės krypties vektorius, iš šios sąlygos gauname, kad vektorius $(F_1(x_0, y_0, z_0); F_2($
statmenas liestinei. Tai reiškia, kad liestinės sudaro plokštumą, kurios lygtis yra

$$F_1(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_2(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_3(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0 \ .$$

Šią lygtį šiek tiek pertvarkome

$$\begin{aligned} &F_1(x_0, y_0, z_0)x + F_2(x_0, y_0, z_0)y + F_3(x_0, y_0, z_0)z \\ &- (F_1(x_0, y_0, z_0)x_0 + F_2(x_0, y_0, z_0)y_0 + F_3(x_0, y_0, z_0)z_0) = 0 \ . \end{aligned}$$

Kadangi $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, pasinaudoję lygybe (3.2), įrodymą baigiame.

9. Paviršiaus ir liečiamosios plokštumos sankirta

Jau žinome, kad antros eilės paviršiaus ir plokštumos sankirta yra antros eilės kreivė. Jei plokštuma yra liečiamoji, sankirtos kreivės tipas yra ne bet koks. Nagrinėjame tik tuos antros eilės paviršius, kurie nėra sudaryti iš plokštumų.

Teiginys 15 *Antros eilės paviršiaus ir liečiamosios plokštumos sankirta gali būti:*
1) vienas taškas (išsigimusi elipsė);
2) pora susikertančių tiesių;
3) dviguba tiesė.

Įrodymas Koordinačių sistemą parenkame taip, kad lietimosi taškas sutaptų su koordinačių sistemos pradžia, o liečiamosios plokštumos lygtis būtų $z = 0$. Iš (3.30) gauname, kad $a_{14} = 0$, $a_{24} = 0$, $a_{44} = 0$. Todėl sankirtos kreivės lygtis yra

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0 \ .$$

Iš jau nagrinėtos kreivių teorijos seka, kad tegalimas tik kuris nors iš suminėtų atvejų.

Pirmuoju atveju lietimosi taškas vadinamas *elipsiniu*, antruoju – *hiperboliniu*, trečiuoju – *paraboliniu*.

10. Charakteringų uždavinių sprendimas

Pateikta paviršių teorija tur būt sužavėjo ne vieną studentą. Bet visgi jo požiūriu šioje teorijoje yra rimtas trūkumas – be uždavinio apie sankirtos kreivės tipo radimą, neaišku ką reikės spręsti per egzaminą. Užpildome šią spragą kelių charakteringų uždavinių sąlygomis bei jų sprendimu.

11. Cilindro lygties radimas

Sąlyga Rasti lygtį cilindro, kurio tiesinės sudaromosios lygiagrečios vektoriui $L(1;3;1)$ ir kerta kreivę K

$$\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x^2+y^2+2z^2=1 \end{cases}$$

Sprendimas Tegul taškas $M(x;y;z)$ priklauso cilindrui. Bet kuris tiesinės sudaromosios, einančios per M, taškas turi pavidalą $N(x+t;y+3t;z+t)$. Kadangi sudaromoji kerta kreivę K, egzistuoja tokia t reikšmė, kad taško N koordinatės tenkina kreivės lygtis, t.y.

$$\begin{cases} 2(x+t)+y+3t+z+t=0 \\ (x+t)^2+(y+3t)^2+2(z+t)^2=1 \end{cases}$$

Iš pirmosios sąlygos seka, kad $t=-(2x+y+z)/6$. Įstatę šią išraišką į antrąją sąlygą ir atlikę aritmetinius veiksmus gauname

$$(4x-y-z)^2+(-2x+5y-z)^2+2(-2x-y+5z)^2=36\ .$$

Dar šiek tiek kantrybės ir parašome atsakymą – cilindro lygtį:

$$7x^2+7y^2+13z^2-5xy-11xz-7yz-9=0\ .$$

11.1. Kūgio lygties radimas

Sąlyga Rasti lygtį kūgio, kurio tiesinės sudaromosios kerta kreivę K

$$\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x^2+y^2+2z^2=1 \end{cases},$$

o $A(1,1,2)$ yra kūgio viršūnė.

Sprendimas Tegul taškas $M(x;y;z)$ priklauso cilindrui. Tiesinės sudaromosios, einančios per M, krypties vektorius yra $\overrightarrow{AM}=(x-1;y-1;z-2)$. Todėl bet kuris šios sudaromosios taškas turi pavidalą $N(1+(x-1)t;1+(y-1)t;2+(z-2)t)$. Kadangi sudaromoji kerta kreivę K, egzistuoja tokia t reikšmė, kad taško N koordinatės tenkina kreivės lygtis, t.y.

$$\begin{cases} 2\Big(1+(x-1)t\Big)+1+(y-1)t+2+(z-2)t=0 \\ \Big(1+(x-1)t\Big)^2+\Big(1+(y-1)t\Big)^2+2\Big(2+(z-2)t\Big)^2=1 \end{cases}$$

Iš pirmosios sąlygos seka, kad $t=-\frac{5}{2x+y+z-5}$. Dar kiek panašiai pasikuitę, kaip ir su cilindro lygtimi, gauname atsakymą:

$$41x^2+24y^2+10z^2+6xy-54xz+32yz+20x+10y+10z-25=0\,.$$

11.2. Tiesinių sudaromųjų radimas

Sąlyga Rasti hiperbolinio paraboloido $4x^2-9y^2=2z$ tiesines sudaromąsias, einančias per paviršiaus tašką $A(1;2;-16)$.

Pirmas sprendimo būdas Remdamiesi formule 3.23 vieną iš sudaromųjų ieškome pavidale

$$\begin{cases} 2x-3y=\mu_1 \\ \mu_1(2x+3y)=2z \end{cases}.$$

Kadangi sudaromoji eina per tašką A, įstatę taško A koordinates į pirmąją lygtį gauname $\mu_1=-4$. Su antrąja lygtimi galime negaišti, nes tikrai gausime tokią pat μ_1 reikšmę. Taigi, viena iš sudaromųjų yra

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 4x + 6y = -z \end{cases}.$$

Remdamiesi formule 3.24 randame antrą sudaromąją:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 8x + 12y = z \end{cases}.$$

Antras sprendimo būdas Ieškome tiesinės sudaromosios krypties vektoriaus $(l; m; n)$ naudodamiesi formulėmis (3.27) ir (3.28): $R = 0$, nes A priklauso paviršiui; $P = 4l^2 - 9m^2$; $Q = 4l - 18m - n$. Tiesė priklauso paviršiui, jei $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$. Spręsdami sistemą

$$\begin{cases} 4l^2 - 9m^2 = 0 \\ 4l - 18m - n = 0 \end{cases}$$

gauname ($l = \frac{3}{2}m$, $n = -12m$) ir ($l = -\frac{3}{2}m$, $n = -24m$). Fiksavę $m = 2$ turime du sudaromųjų krypties vektorius $(3; 2; -24)$ ir $(-3; 2; -48)$. Todėl ieškomų tiesinių sudaromųjų kanoninės lygtys yra

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+16}{-24}, \quad \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+16}{-48}.$$

Antrasis sprendimo būdas yra universalesnis. Naudodamiesi juo išspręskite dar vieną uždavinį.

Sąlyga Rasti paviršiaus $2x^2+2y^2-z^2-5xy+xz+yz-6x+y+z-3 = 0$ tiesines sudaromąsias, einančias per jo tašką $A(1; -2; 3)$.

12. Pratimai bei uždaviniai

Standartinė temos nagrinėjimo pabaiga – užduotys savarankiškam darbui.

1. Rasti paviršiaus $3y^2 + 4z^2 + 24x + 12y - 72z + 360 = 0$ ir plokštumos $x - y + z - 1 = 0$ sankirtos kreivės tipą.

2. Rasti paviršiaus $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$ ir plokštumos $2x - y + z = 0$ sankirtos kreivės tipą.

3. Rasti paviršiaus $x^2-3y^2+z^2-6xy+2yz-3y+z-1=0$ ir plokštumos $2x-3y-z+2=0$ sankirtos kreivės tipą.

4. Rasti lygtį cilindro, kurio tiesinės sudaromosios statmenos plokštumai $2x-4z+3=0$ ir kerta kreivę K

$$\begin{cases} y^2+z^2-x=0 \\ x-2z=0 \end{cases}$$

5. Rasti lygtį cilindro, kurio tiesinės sudaromosios lygiagrečios x-ašiai ir kerta kreivę K

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=25 \\ x+y-z+2=0 \end{cases}$$

6. Rasti lygtį kūgio, kurio tiesinės sudaromosios kerta kreivę K

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=25 \\ x+y-z+2=0 \end{cases},$$

o $A(1,-1,1)$ yra kūgio viršūnė.

7. Rasti paviršiaus

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$$

ir tiesės

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+2}{-2}$$

sankirtos taškus ir plokštumas, liečiančias paviršių tuose taškuose.

8. Rasti paviršiaus $25x^2+16y^2-9z^2=25$ liečiamąsias plokštumas, išvestas per tiesę

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}\ .$$

9. Rasti paviršiaus $x^2+9y^2-4z^2=4$ tiesines sudaromąsias, einančias per jo tašką $(2;2;3)$.

10. Rasti paviršiaus $x^2+y^2+2z^2-xy-6xz-3yz-2x+6y-7z-1=0$ tiesines sudaromąsias, einančias per jo tašką $(3;-2;0)$.

Literatūra

1. K. Bulota, P. Survila. Algebra ir skaičių teorija. 1. Vilnius: Mokslas, 1989. 412 p.
2. K. Bulota, P. Survila. Algebra ir skaičių teorija. 2. Vilnius: Mokslas, 1990. 416 p.
3. P. Katilius. Analizinė geometrija. Vilnius: Mintis, 1973. 564 p.
4. A. Matuliauskas. Algebra. Vilnius: Mokslas, 1985. 384 p.
5. V. Pekarskas, A. Pekarskienė. Tiesinės algebros ir analitinės geometrijos elementai. Kaunas: Technologija, 2004. 388 p.
6. A. Krylovas, E. Paliokas. Algebra ir geometrija pasitelkiant Maple. Teorijos santrauka ir laboratoriniai darbai. Pirmoji dalis. Vilnius: Technika, 2006. 146 p.